



TESIS - SS142501

**PERBANDINGAN MODEL *SMITH*, *SCHLATHER*,
BROWN-RESNICK DAN *GEOMETRIC GAUSSIAN*
PADA PEMODELAN CURAH HUJAN**
(Studi Kasus : Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)

YENI DWI HATANTI
NRP. 1314201010

DOSEN PEMBIMBING :
Dr. Sutikno, S.Si, M.Si
Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SS142501

**COMPARISON MODEL OF SMITH, SCHLATHER,
BROWN-RESNICK AND GEOMETRIC GAUSSIAN
AT RAINFALL EXTREMES**

(Case Study : Rainfall Extremes at Lamongan)

YENI DWI HATANTI
NRP. 1314201010

SUPERVISOR :
Dr. Sutikno, S.Si, M.Si
Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016


**PERBANDINGAN MODEL SMITH, SCHLATHER, BROWN-RESNICK,
DAN GEOMETRIC GAUSSIAN
PADA PEMODELAN CURAH HUJAN EKSTREM
(Studi Kasus: Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)**

**Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Oleh :
YENI DWI HATANTI
NRP. 1314 201 010**

**Tanggal Ujian : 27 Januari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016**

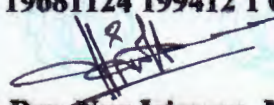
Disetujui Oleh :


1. **Dr. Sutikno, S.Si., M.Si**
NIP. 19710313 199702 1 001


(Pembimbing I)


2. **Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si**
NIP. 19681124 199412 1 001

(Pembimbing II)


3. **Prof. Drs. Nur Iriawan, M.IKom, Ph.D**
NIP. 19621015 198803 1 002

(Penguji)


4. **Dr. Drs. Nyoman Latra, MS**
NIP. 19511130 197901 1 001

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana,


Prof. Ir. Diahar Manfaat, M.Sc. Ph.D
NIP. 19601202 198701 1 001

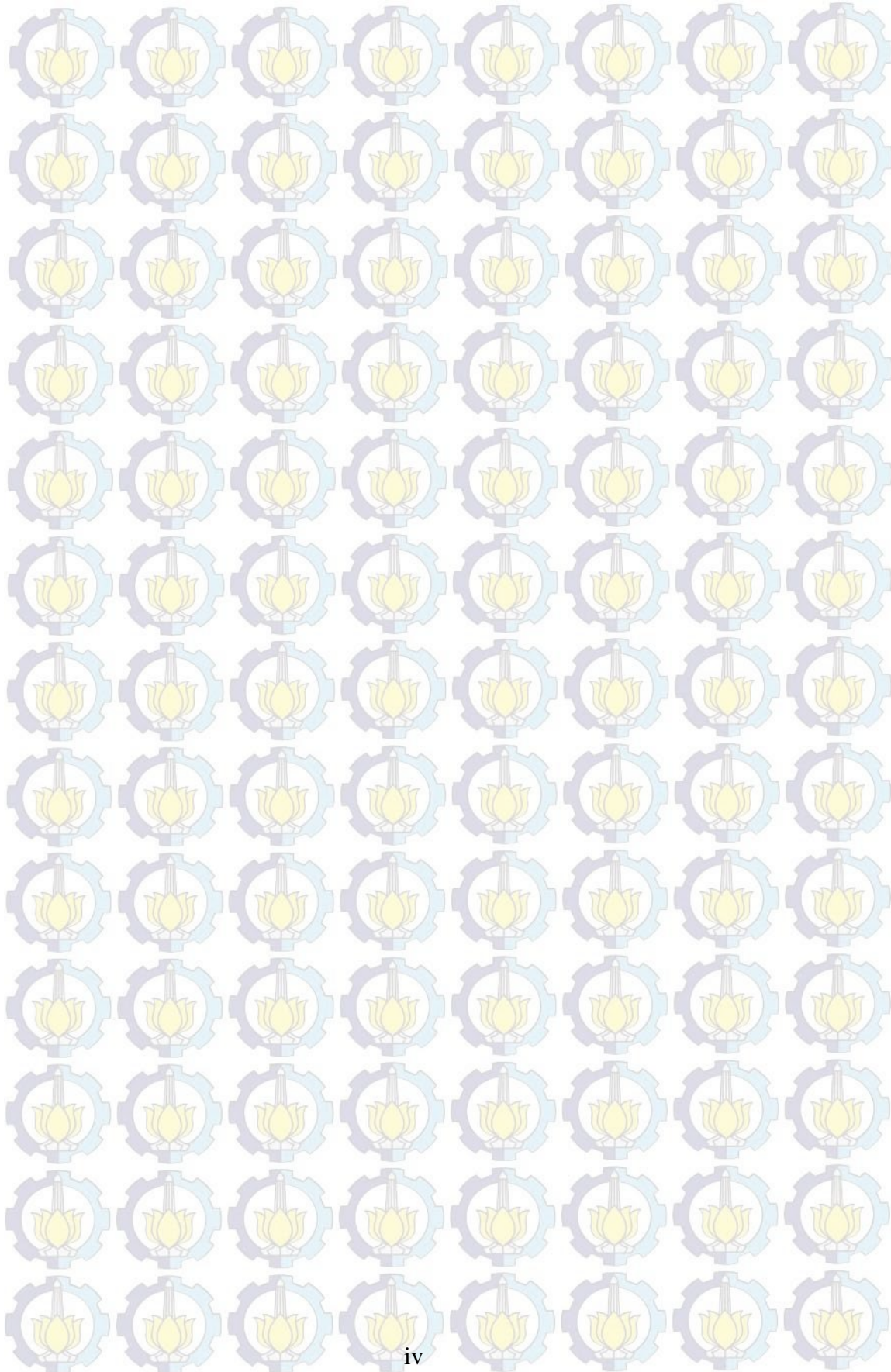
Perbandingan Model Smith, Schlather, Brown-Resnick dan Geometric Gaussian Pada Pemodelan Curah Hujan Ekstrem (Studi Kasus: Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)

Nama Mahasiswa : Yeni Dwi Hatanti
NRP : 1314 201 010
Pembimbing : Dr. Sutikno, S.Si, M.Si
Co-Pembimbing : Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si

ABSTRAK

Curah hujan ekstrem merupakan kejadian alam yang jarang terjadi namun tidak bisa dihindari. Kejadian ini seringkali membawa beberapa dampak merugikan bagi kehidupan. Dampak merugikan tersebut dapat diminimalisir salah satunya dengan menerapkan metode statistika yaitu *Extreme Value Theory (EVT)*. Ada dua metode dalam EVT yaitu *block maxima (BM)* dan *peak over threshold (POT)*. Pada awalnya penelitian tentang kejadian ekstrem dilakukan hanya pada satu lokasi, namun pada perkembangannya penelitian ini dilakukan pada lebih dari satu lokasi, dimana terdapat dependensi antar lokasi tersebut. Dengan demikian *Extreme Value Theory (EVT)* berkembang menjadi *Spatial extremes modeling*. Salah satu pendekatan dalam *Spatial extremes modeling* adalah *Max-stable* proses. Model-model *Max-stable* proses secara umum memiliki distribusi yang mengarah ke distribusi *Generalized Extreme Value (GEV)*. Ada empat model terkenal dan terus dikembangkan yaitu model *Smith, Schlather, Brown Resnick* dan *Geometric Gaussian* dengan salah satu metode estimasi parameternya menggunakan *Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE)*. Penelitian ini mengkaji prosedur analisis kejadian ekstrem spasial dengan *Max Stable* proses dengan aplikasi data curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Data yang digunakan untuk analisis adalah data curah hujan tahun 1981-2010, sedangkan untuk validasi model menggunakan data tahun 2011-2012. Grafik koefisien eksternal menunjukkan bahwa ukuran dependensi spasial berada pada kisaran 1,3 hingga 1,5. *Return level* curah hujan ekstrem di tujuh stasiun pengamatan di Kabupaten Lamongan dengan periode ulang dua tahun memberikan nilai prediksi curah hujan terkecil 96.68 mm pada model Smith dan tertinggi 107.83 mm pada model Geometric Gaussian.

Kata Kunci: *Extreme value theory, Max Stable proses, Smith, Schlather, Brown-Resnick, Geometric Gaussian.*



Comparation Model of Smith, Schlather, Brown-Resnick and Geometric Gaussian at Rainfall Extremes

(Case Study: Rainfall Extrem at Lamongan)

Name : Yeni Dwi Hatanti
NRP : 1314 201 010
Supervisor : Dr. Sutikno, S.Si, M.Si
Co-Supervisor : Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si

ABSTRACT

Extreme rainfall is a rare natural occurrence but can not be avoided. These events often bring some adverse impacts to life. Adverse impacts can be minimized either by applying statistical methods, such as Extreme Value Theory (EVT). There are two methods in EVT that is block maxima (BM) and peak over threshold (POT). At the beginning of research on extreme events is done at only one location, but the development of this research was conducted at more than one location, where there are dependencies between these locations. Therefore Extreme Value Theory (EVT) develop into Spatial extremes modeling. One approach in Spatial extremes modeling is max-stable processes. Model-model of max-stable processes generally have a distribution that leads to distribution Generalized Extreme Value (GEV). There are four models max-stable processes: Smith, Schlather, Brown Resnick and Geometric Gaussian with one parameter estimation method using Maximum Pairwise Likelihood Estimation (MPLE). This study examines the spatial analysis procedures with extreme events max-stable processes with extreme rainfall data applications in Lamongan. The data used for the analysis is years of rainfall data 1981-2010, whereas to use the data for model validation 2011-2012. External coefficient chart shows that the value of the spatial dependencies in the range 1,3 up to 1,5. Return level extreme rainfall in seven observation stations in Lamongan with a return period of two years gives the smallest value of rainfall prediction is 96.68 mm/day in model of Smith and the highest is 107.83 mm/day in model of Geometric Gaussian.

Keywords: Extreme value theory, max-stable processes, Smith, Schlather, Brown-Resnick, Geometric Gaussian.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah tiada henti puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah *azza wa jalla* yang selalu member jalan terbaik sehingga penulis dapat menyelesaikan buku Tesis yang berjudul **“Perbandingan Model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick*, dan *Geometric Gaussian* Pada Pemodelan Curah Hujan Ekstrem (Studi Kasus: Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)”**.

Penulis menyadari penyusunan Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih banyak kepada:

1. Bapak Dr. Sutikno, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar memberikan bimbingan, ilmu, saran, dan waktu yang beliau luangkan untuk membimbing penulis.
2. Bapak Prof. Drs. Nur Iriawan, M.IKom, Ph.D, dan Bapak Dr. Drs. I Nyoman Latra, MS selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun dalam penyusunan Tesis ini.
3. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku Ketua Jurusan dan Ketua Program Studi Pasca Sarjana Statistika FMIPA ITS dan Bapak Dr. Muhammad Mashuri, MT selaku dosen wali yang telah memberikan banyak fasilitas untuk kelancaran penyelesaian Tesis ini.
4. Bapak dan Ibu dosen pengajar serta staf Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya yang dengan tulus ikhlas telah memberikan bekal ilmu selama penulis melakukan studi.
5. Suamiku tercinta Sujianto atas segala pengertian dan kesabarannya. Tiga buah hati penyemangat hidupku Nala Priyatama Wirayudha, Bima Arnandita Anugrah Perwira dan Rayindra Sakha Bintang Perwira. Bapak, Ibu, mertua dan keluarga besar yang penulis yakin terselip dalam doa mereka untuk kesuksesan penulis.
6. Teman-teman dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, terima kasih sudah banyak membantu dalam perkuliahan.

Penulis memohon maaf atas segala kesalahan diri penulis, juga pada pembaca semua. Sungguh itu murni datangnya dari penulis yang masih miskin ilmu dan pengalaman. Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun penulis harapkan agar penelitian selanjutnya menjadi lebih baik. Penulis berharap semoga tesis ini dapat memberi manfaat dan sumbangan untuk menambah wawasan keilmuan bagi pembaca.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 <i>Extreme Value Theory</i>	7
2.2 Metode <i>Block Maxima</i>	8
2.3 Generalized Extreme Value (GEV)	9
2.3.1 Tipe Distribusi GEV	9
2.3.2 Estmasi Parameter Distribusi GEV dengan MLE.....	11
2.4 Uji Kecocokan Distribusi.....	14
2.5 Spatial Extreme Modelling	15
2.6 <i>Max-stable Processes</i>	17
2.6.1 Model <i>Smith</i>	18
2.6.2 Model <i>Schlather</i>	19
2.6.3 Model <i>Brown-Resnick</i>	20
2.6.4 Model <i>Geometric Gaussian</i>	22

2.7	<i>Spatial Dependence</i>	21
2.7.1	Koefisien Eksternal	22
2.8	Estimasi Parameternya GEV Spatial dengan MPLE	24
2.9	Pemilihan Model Terbaik.....	26
2.10	Return Level	27
2.11	Root Mean Square Error (RMSE).....	28
2.12	Curah Hujan	29
2.12.1	Curah Hujan Ekstrem	30
2.13	Zona Musim	30
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN		
3.1	Sumber Data dan Variabel Penelitian	31
3.2	Metode Analisis Data pada <i>Max-stable Processes Model Geometric Gaussian</i>	33
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN		
4.1	Estimasi Parameter Model <i>Geometric Gaussian</i>	38
4.2	Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Lamongan dengan Model Geometrik Gaussian	45
4.2.1	Pra Pemrosesan Data.....	45
4.2.2	Deskripsi Curah Hujan di Kabupaten Lamongan	45
4.2.3	Identifikasi Pola Data <i>Heavy Tail</i> dan Nilai Ekstrem	48
4.2.4	Pengambilan Sampel Ekstrem dengan <i>Block Maxima</i>	49
4.2.5	Deskripsi Sampel Ekstrem	50
4.2.6	Identifikasi Distribusi GEV.....	51
4.2.7	Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan <i>Maximum Likelihood Estimation (MLE)</i>	53
4.2.8	Identifikasi Dependensi Spasial pada Sampel Curah Hujan Ekstrem.....	53
4.2.9	Penaksiran Model <i>Geometric Gaussian</i>	55
4.2.10	Perhitungan Return Level.....	61
BAB 5 HASIL DAN PEMBAHASAN		
5.1	Kesimpulan.....	67
5.1	Saran.....	67

DAFTAR PUSTAKA.....	69
LAMPIRAN.....	73
BIODATA PENULIS.....	87

DAFTAR GAMBAR

		Halaman
Gambar 2.1	Ilustrasi Identifikasi Nilai Ekstrem dengan <i>Block Maxima</i>	8
Gambar 2.2	Fungsi densitas peluang distribusi GEV	10
Gambar 2.3	Ilustrasi Pengamatan Spasial Tak Beraturan	16
Gambar 2.4	Ilustrasi <i>Return Level</i>	27
Gambar 2.5	Pola Curah Hujan di Indonesia	30
Gambar 3.1	Lokasi Pos Curah Hujan di Kabupaten Lamongan	31
Gambar 3.2	Diagram Alir Analisis Data	35
Gambar 4.1	Pola Curah Hujan Harian di Stasiun Babat	47
Gambar 4.2	Pola Curah Hujan Harian di Stasiun Blawi (a), Karangbinangun (b), Kedungpring (c), Lamongan (d), Pangkatrejo (e), dan Sukodadi (f)	47
Gambar 4.3	Histogram Curah Hujan Harian di Stasiun Babat	48
Gambar 4.4	Histogram Curah Hujan di Stasiun Blawi (a), Karangbinangun (b), Kedungpring (c), Lamongan (d), Pangkatrejo (e) dan Sukodadi (f)	49
Gambar 4.5	Probability Plot di Stasiun Blawi (a), Karangbinangun (b), Kedungpring (c), Lamongan (d), Pangkatrejo (e) dan Sukodadi (f)	52
Gambar 4.6	Koefisien Eksternal <i>max-stable processes</i>	55
Gambar 4.7	Boxplot Return Level Tahun 2012	64

DAFTAR TABEL

		Halaman
Tabel 3.1	Struktur Data Penelitian	32
Tabel 3.2	Kombinasi Model <i>Trend Surface</i>	34
Tabel 4.1	Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum, dan Nilai Maksimum Curah Hujan (mm/hari)	46
Tabel 4.2	Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum, dan Nilai Maksimum Sampel Ekstrem (mm/hari)	51
Tabel 4.3	Uji <i>Kolmogorov-Smirnov</i> GEV Periode Blok 3 Bulanan	52
Tabel 4.4	Estimasi Parameter GEV Periode Blok 3 Bulanan	53
Tabel 4.5	Estimasi Parameter Dependensi Model <i>Geometric Gaussian</i> dan <i>Schlather</i>	56
Tabel 4.6	Estimasi Parameter 9 Kombinasi Model <i>Trend Surface</i>	58
Tabel 4.7	Estimasi Parameter model <i>Smith, Schlater,</i> <i>Brown-Resnick</i> dan <i>Geometric Gaussian</i>	60
Tabel 4.8	Perhitungan <i>Retun Level</i> pada periode ulang 2 tahun (Tahun 2012)	62
Tabel 4.9	Perhitungan <i>Retun Level</i> periode ulang 5, 8, 10, 15,20, 25,50 tahun	65

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN A Data Curah Hujan (mm) tahun 1981-2012	73
LAMPIRAN B Data Curah Hujan Ekstrem (mm) dengan Metode <i>Blok Maksima</i>	74
LAMPIRAN C Model Kombinasi <i>Trend Surface</i> Distribusi <i>Generalized Extreme Value</i> (GEV) Spasial	81
LAMPIRAN D Syntax Program R ' <i>extRemes</i> dan <i>SpatialExtreme</i> '	82

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu kejadian alam yang jarang terjadi namun sulit untuk dihindari adalah cuaca dan iklim ekstrem seperti gelombang panas, banjir, angin topan, salju ekstrem, dan curah hujan tinggi/ekstrem. Kejadian ini seringkali berdampak merugikan terhadap berbagai segi kehidupan, diantaranya: wabah penyakit, gangguan kesehatan, nelayan yang tidak berani melaut akibat ombak tinggi, dan petani yang gagal panen. Oleh karena itulah dampak perubahan cuaca dan iklim ekstrem juga merupakan bagian permasalahan yang serius bagi kehidupan masyarakat di dunia (WMO, 2009).

Curah hujan ekstrem sering terjadi di Indonesia, dan untuk meminimalisir dampak buruk kejadian tersebut, perlu dilakukan antisipasi awal dan peringatan dini. Salah satu caranya adalah dengan mempelajari pola kejadian curah hujan ekstrem. Untuk mendukung kebutuhan tersebut, diperlukan metode statistika yang dapat menjelaskan kejadian curah hujan ekstrem tersebut.

Salah satu metode statistika yang dikembangkan untuk menganalisis kejadian ekstrem ialah *Extreme Value Theory* (EVT). Penentuan nilai ekstrem berdasarkan EVT dapat diperoleh dengan pendekatan *block maxima* (BM) dan *peak over threshold* (POT). Metode BM adalah suatu metode yang mengidentifikasi nilai ekstrem melalui nilai maksimum data pengamatan yang dikelompokkan pada suatu periode tertentu. Pendekatan ini menghasilkan hanya satu nilai ekstrem pada setiap periode. Sementara metode POT adalah suatu pendekatan untuk mengidentifikasi nilai ekstrem melalui data pengamatan yang melebihi suatu nilai ambang (*threshold*) tertentu. Metode POT akan menghasilkan satu atau lebih nilai ekstrem pada periode tertentu.

Beberapa penelitian kejadian ekstrem telah dilakukan di beberapa negara diantaranya: Li, Cai, dan Campbell, 2004 serta Gilliland dan Katz, 2006. Li, Cai dan Campbell (2004) mengidentifikasi curah hujan ekstrem di wilayah Australia dengan *generalized pareto distribution*. Gilliland dan Katz (2006)

mengidentifikasi temperatur ekstrem dan menentukan *return level* di wilayah United States dengan pendekatan *generalized extreme value*. Di Indonesia, salah satu penelitian telah dikembangkan untuk menganalisis kejadian ekstrem dari curah hujan. Wahyudi (2012) mengidentifikasi curah hujan ekstrem menggunakan pendekatan *Peaks Over Threshold-Generalized Pareto Distribution* dan *Block Maxima-Generalized Extreme Value*, serta melakukan prediksi *return value* untuk satu tahun mendatang. Penelitian tersebut masih terbatas pada kasus satu lokasi atau kasus data ekstrem univariate.

Pada perkembangannya, seringkali identifikasi kejadian ekstrem secara univariat saja tidak cukup. Seperti pada kejadian curah hujan biasanya diukur berdasarkan lokasi. Curah hujan di suatu lokasi atau daerah tertentu pada zona yang sama diduga bersifat homogen. Artinya bahwa dalam satu zona, curah hujan di suatu lokasi pengukuran dengan curah hujan di lokasi lain memiliki karakteristik yang sama. Dengan kata lain, terdapat dependensi yaitu lokasi yang harus ikut diperhitungkan. Oleh karena itu, pada penelitian ini dilakukan kajian terhadap data curah hujan ekstrem dengan melibatkan unsur spasial.

Dalam perkembangannya saat ini sudah muncul teori tentang memodelkan data ekstrem secara spasial atau yang dikenal dengan *spatial extremes modeling*. Metode ini banyak digunakan untuk permasalahan kejadian-kejadian alam atau lingkungan dengan domain spasial. Namun demikian terdapat kesulitan utama dalam mempelajari metode *spatial extreme value* yaitu kurangnya model yang fleksibel dan metode inferensial yang sesuai. Salah satu pendekatan untuk mengatasi kesulitan tersebut adalah dengan *max-stable processes*.

Max-stable processes analog dengan nilai ekstrem multivariat yang mempunyai pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Konsep *max-stable processes* mulai dikaji di beberapa negara, namun di Indonesia masih sangat terbatas. Padoan, Ribatet dan Sisson (2010) meneliti data curah hujan di 46 stasiun pengamatan curah hujan di Pegunungan Appalachian, Amerika Utara menggunakan salah satu model *max-stable* yaitu model *Smith*. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa keseluruhan model *max-stable* sesuai untuk memodelkan data dengan baik. Blanchet dan Davison (2011) membandingkan

model *max-stable* yaitu model *Smith* dan model *Schlather* dengan studi kasus data kedalaman salju di Switzerland. Berdasarkan *Takeuchi Information Criterion* (TIC), model *Schlather* dengan berbagai fungsi korelasi memberikan hasil lebih baik daripada model *Smith*. Model *Smith* (Smith, 1990), model *Schlather* (Schlather, 2002), model *Brown-Resnick* (Kabluchko, Schlather dan De Haan 2009), dan model *Geometric Gaussian* (Davison, Padoan dan Ribatet 2012) merupakan model-model dalam *max-stable processes*.

Hal terpenting dalam kajian EVT adalah menentukan *return level* yang apabila dalam penelitian curah hujan dapat diartikan sebagai nilai maksimum curah hujan yang diharapkan dilampaui satu kali dalam periode waktu ulang tertentu. *Return level* selanjutnya dapat digunakan sebagai salah satu cara penanganan dampak kerugian produksi pertanian akibat iklim ekstrem. Selain itu, informasi *return level* juga dapat digunakan untuk mengukur kekuatan bangunan seperti bendungan, jembatan, atau gedung terhadap iklim dan cuaca ekstrem pada beberapa periode tahun yang akan datang.

Anindita (2015) meneliti data curah hujan di 7 stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan Jawa Timur menggunakan salah satu model *max-stable* yaitu model *Smith* dengan metode *Maximum Pairwise Likelihood Estimator* untuk estimasi parameternya. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa nilai RMSE metode *max-stable processes* model *Smith* cukup besar.

Sementara penelitian masih dengan metode *max-stable processes* dilakukan oleh Malika (2015) dengan pendekatan model *Schlather* juga dengan metode *Maximum Pairwise Likelihood Estimator* untuk estimasi parameternya. Hasil penelitiannya adalah koefisien eksternal data curah hujan ekstrem menunjukkan adanya indikasi dependen antar lokasi pengamatan di Kabupaten Lamongan. Namun nilai dependensi yang ditunjukkan melalui koefisien eksternal tidak terlalu kuat. Selain itu, model *Schlather* terbaik yang terpilih berdasarkan *Takeuchi Information Criterion* (TIC) adalah model dengan fungsi korelasi *Cauchy*.

Ramadani (2015) meneliti dengan metode *max-stable processes* dengan pendekatan metode *Brown-Resnick*. Estimasi *return level* dilakukan dengan periode ulang dua, tiga, empat, dan lima tahun melalui pendekatan model *Smith*

dan *Brown-Resnick*. Diperoleh hasil RMSE dari model *Brown-Resnick* lebih kecil dibandingkan model *Smith*.

Berdasarkan hasil *return level* yang berbeda-beda tersebut, penelitian ini bertujuan mengkaji estimator model *Geometric Gaussian*, dimana estimator tersebut digunakan untuk perhitungan *return level*. Hasil *return level* model *Geometric Gaussian* selanjutnya dibandingkan dengan hasil *return level* model *max stable processes* lainnya yaitu (model *Smith*, *Schlather* dan *Brown-Resnick*). Penelitian dilakukan pada studi kasus yang sama yaitu curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Stasiun curah hujan yang digunakan adalah stasiun yang tersebar di beberapa Kecamatan di Lamongan seperti Babat, Blawi, Karangbinangun, Kedungpring, Lamongan, Pangkatrejo dan Sukodadi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana estimator model *Geometric Gaussian*?
2. Bagaimana perbandingan hasil *return level* model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* pada data curah hujan di Kabupaten Lamongan periode 1981-2012?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji estimator model *Geometric Gaussian*
2. Membandingkan hasil *return level* model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* pada data curah hujan di Kabupaten Lamongan periode 1981-2012

1.4 Manfaat Penelitian

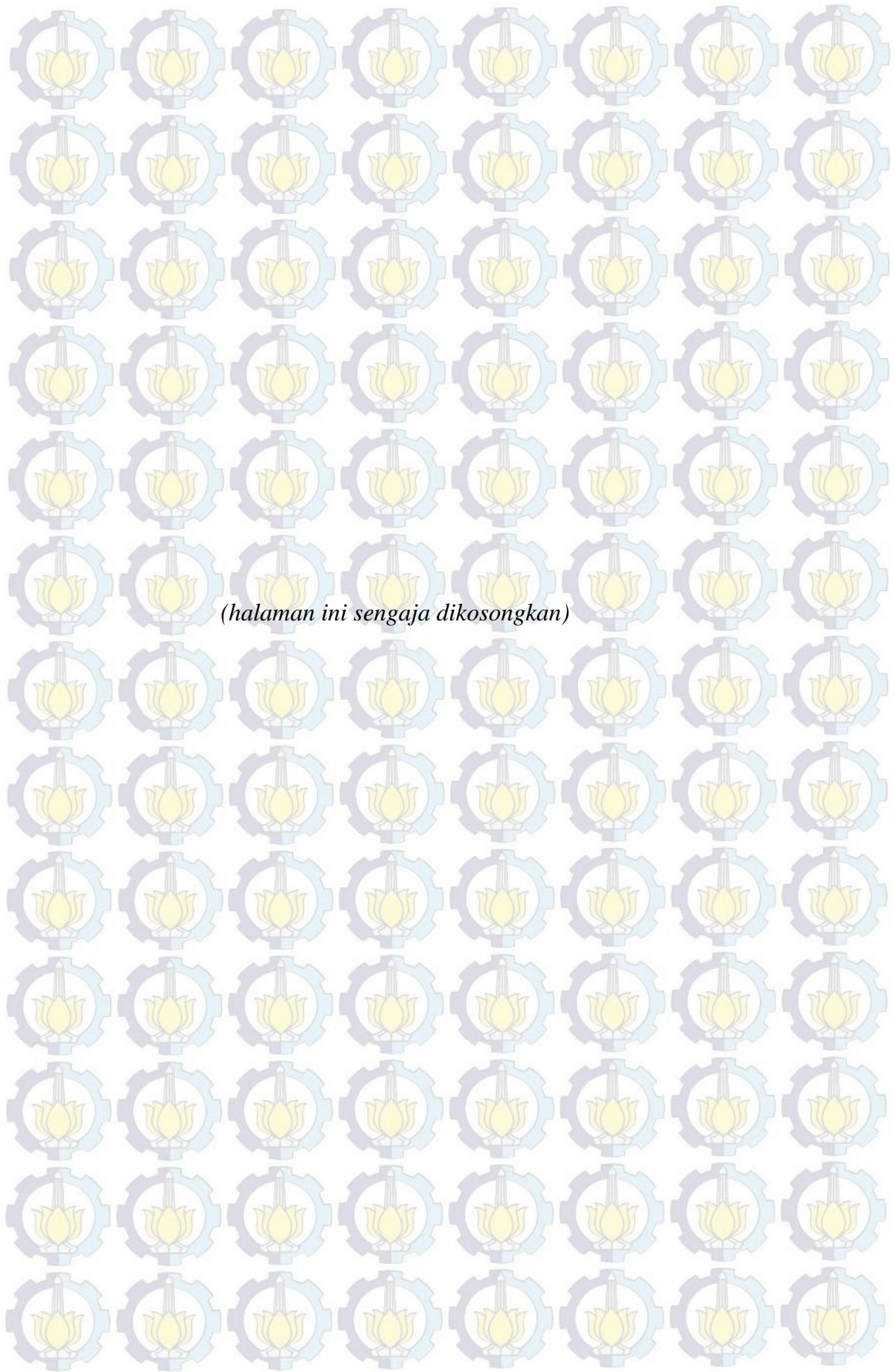
Manfaat penelitian antara lain sebagai berikut:

1. Penulis memperoleh pengetahuan akademis dan pengalaman praktis untuk melakukan pemodelan spasial ekstrem dengan *max-stable processes* (model *Smith, Schlather, Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*).
2. Bagi pengguna penelitian, hasil penelitian ini dapat digunakan oleh beberapa instansi diantaranya adalah Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) dalam rangka mendapatkan metode dan penyediaan informasi iklim ekstrem. Dapat digunakan juga oleh Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional (LAPAN).
3. Bagi Departemen Pertanian, penelitian ini dapat digunakan sebagai acuan prakiraan cuaca ekstrem, sehingga kerugian akibat gagal panen dapat diminimalkan (antisipasi).

1.5 Batasan Masalah

Batasan yang digunakan dalam penelitian ini antara lain sebagai berikut:

1. Data yang digunakan berupa data curah hujan di Kabupaten Lamongan tahun 1981 sampai tahun 2012 dan diasumsikan homogen dimana data curah hujan di masing-masing stasiun pengamatan memiliki kesamaan karakteristik.
2. Metode untuk mengidentifikasi nilai ekstrem adalah *block maxima* dengan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) pada *max-stable processes* (model *Smith, Schlather, Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*).
3. Metode yang digunakan untuk estimasi parameter pada *max-stable processes* (model *Smith, Schlather, Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*) adalah metode estimasi *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE).



BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Extreme Value Theory*

Teori nilai ekstrem (*Extreme Value Theory*/EVT) bertujuan untuk mengkaji perilaku stokastik suatu proses pada suatu nilai ambang/*threshold* tertentu. Analisis ini juga memungkinkan untuk menaksir peluang suatu kejadian melebihi nilai ambang yang ditentukan. Kejadian yang melebihi nilai ambang tersebut dinamakan kejadian ekstrem.

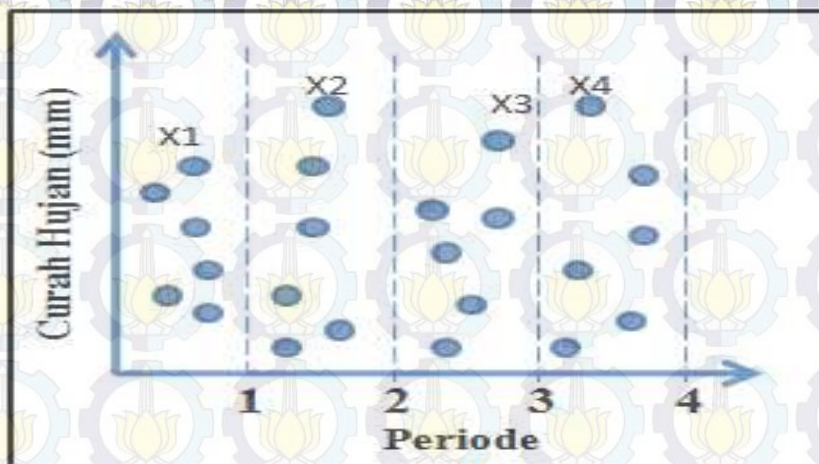
EVT merupakan suatu metode statistik yang dapat diterapkan pada kejadian yang besar dalam peristiwa alam seperti curah hujan, banjir, badai, dan polusi udara (Kotz dan Nadarajah, 2000). Tujuan dari metode ini adalah untuk menentukan estimasi peluang kejadian ekstrem dengan memperhatikan ekor (*tail*) dari fungsi distribusi berdasarkan nilai-nilai ekstrem yang diperoleh. Studi menunjukkan bahwa data iklim memiliki perilaku stokastik dengan ekor distribusi yang gemuk (*heavy tail*). Hal ini menunjukkan bahwa peluang terjadinya nilai ekstrem akan lebih besar dibandingkan dengan data berdistribusi normal. Oleh karena itu, pendekatan dengan metode konvensional, misalnya dengan asumsi normal, tidak lagi relevan. Dalam penelitian kejadian ekstrem, langkah pertama berdasarkan EVT untuk analisis selanjutnya adalah menentukan nilai ekstrem.

Terdapat dua pendekatan dalam mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan EVT. Pendekatan pertama adalah metode *block maxima* (BM), yaitu mengambil nilai maksimum dalam satu periode. Pendekatan ini menghasilkan hanya satu nilai ekstrem pada setiap periode. Pendekatan kedua adalah metode *Peaks Over Threshold* (POT), yaitu mengambil nilai-nilai yang melewati suatu nilai ambang/*threshold* (McNeil, 1999; Gilli dan Kellezi, 2003). Metode POT akan menghasilkan satu atau lebih nilai ekstrem pada periode tertentu.

2.2 Metode *Block Maxima*

Dalam penelitian yang bertujuan mengidentifikasi nilai ekstrem, salah satu metode yang digunakan adalah BM. Metode ini mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan nilai maksimum data pengamatan yang dikelompokkan berdasarkan periode tertentu. Data pengamatan dibagi dalam blok-blok pada periode waktu tertentu, misal bulan, triwulan, semester, atau tahun, kemudian untuk setiap blok ditentukan besarnya data pengamatan maksimum dan nilai tersebut adalah nilai ekstrem untuk setiap blok dan digunakan sebagai sampel pada metode BM.

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.1 terlihat empat blok periode dengan masing-masing periode terdapat tiga observasi. Titik X1, X2, X3 dan X4 pada masing-masing blok menandakan bahwa titik tersebut merupakan observasi dengan nilai tertinggi di antara observasi lain. Nilai-nilai tertinggi inilah yang menjadi nilai ekstrem yang dimasukkan ke dalam sampel penelitian.



Gambar 2.1 Ilustrasi Identifikasi Nilai Ekstrem dengan *Block Maxima*
(Sumber: Anindita, 2015)

Gambar 2.1 menunjukkan hanya diperoleh satu nilai ekstrem pada masing-masing periode berdasarkan metode BM. Pada periode 1 diperoleh hanya satu nilai ekstrem yaitu X1, begitu pula berlaku pada periode yang lain. Nilai ekstrem tersebut pada akhirnya membentuk data sampel nilai ekstrem yang mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

2.3 Generalized Extreme Value (GEV)

Metode BM yang menggunakan pendekatan distribusi GEV mengaplikasikan teorema Fisher Tippet Gnedenko (1928) yang menyatakan bahwa apabila suatu seri data yang terdiri atas nilai tertinggi (*maxima*) pada suatu interval waktu tertentu akan mengikuti distribusi GEV dengan bentuk *Cumulative Distribution Function* (CDF) dan *Probability Density Function* (PDF) sesuai persamaan (2.1) dan (2.2) sebagai berikut:

CDF untuk distribusi GEV :

$$F(x; \sim, \dagger, \kappa) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}, & -\infty < y < \infty, \quad \kappa \neq 0 \quad 1 + \kappa \left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) > 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right\}, & -\infty < x < \infty, \quad \kappa = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

PDF untuk distribusi GEV :

$$f(x; \sim, \dagger, \kappa) = \begin{cases} \frac{1}{\dagger} \left\{ 1 + \kappa \left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right\}^{\frac{1}{\kappa} - 1} \exp \left\{ - \left(1 + \kappa \left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right\}, & \text{untuk } \kappa \neq 0 \\ \frac{1}{\dagger} \exp \left\{ - \frac{x - \sim}{\dagger} \right\} \exp \left\{ - \exp \left(- \frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right\}, & \text{untuk } \kappa = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dengan

μ adalah parameter lokasi (*location*) dengan $-\infty < \sim < \infty$

σ adalah parameter skala (*scale*) dengan > 0

κ adalah parameter bentuk (*shape*)

2.3.1 Tipe Distribusi GEV

Berdasarkan besaran nilai parameter bentuk (κ), maka GEV dibedakan menjadi tiga tipe distribusi marginal $G(x)$, yaitu :

1. Tipe I – distribusi Gumbel jika $\xi = 0$

$$G(x) = \exp \left\{ -\exp \left[-\left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right] \right\}, -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

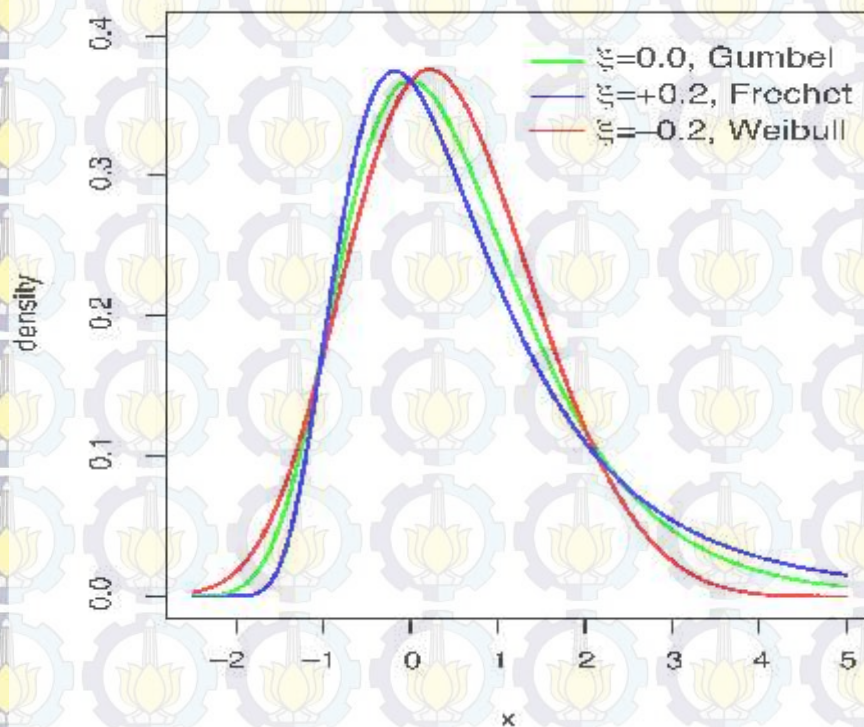
2. Tipe II – distribusi Frechet jika $\xi > 0$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \sim \\ \exp \left[-\left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right)^{-1/\xi} \right], & x > \sim \end{cases} \quad (2.4)$$

3. Tipe III-distribusi Weibull jika $\xi < 0$

$$G(x) = \begin{cases} \exp \left[-\left\{ -\left(\frac{x - \sim}{\dagger} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi}} \right], & x < \sim \\ 1, & x \geq \sim \end{cases} \quad (2.5)$$

GEV



Gambar 2.2 Fungsi densitas peluang distribusi GEV (Sumber:Christoph 2015)

Gambar 2.2 merupakan bentuk fungsi densitas peluang distribusi Weibull pada $\xi = -0,2$ atau $\xi < 0$ yang ditunjukkan oleh garis berwarna merah. Sementara bentuk fungsi densitas peluang distribusi Gumbel pada $\xi = 0$ yang ditunjukkan oleh garis berwarna hijau dan bentuk fungsi densitas peluang distribusi Frechet pada $\xi = 0,2$ atau $\xi > 0$ yang ditunjukkan oleh garis berwarna biru. Parameter ξ menunjukkan bentuk dari ekor (*tail*) dari distribusi. Semakin besar nilai dari ξ , semakin gemuk pula bentuk dari ekor kanan dari distribusinya. Tipe distribusi di atas menunjukkan bahwa distribusi yang memiliki ekor paling gemuk ialah distribusi Frechet ($\xi > 0$).

2.3.2 Estimasi Parameter distribusi GEV dengan MLE

Estimasi parameter distribusi GEV dapat dilakukan dengan beberapa cara, salah satunya dengan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Hal utama dalam mengestimasi parameter dengan MLE adalah memaksimumkan fungsi *likelihood* PDF distribusi GEV dimana fungsi *Likelihood* merupakan fungsi peluang bersama x_1, x_2, \dots, x_n .

Secara umum distribusi GEV memiliki PDF seperti pada persamaan (2.2) dan berdasarkan metode MLE maka fungsi *likelihood* untuk GEV untuk 0 adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} L(\sim, \dagger, <) &= \prod_{i=1}^m f(x_i; \sim, \dagger, <) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\dagger} \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<} - 1} \exp \left[- \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{\dagger} \right)^m \prod_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<} - 1} \exp \left[- \prod_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<}} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Selanjutnya memaksimumkan fungsi *likelihood* tersebut dengan membuat fungsi *ln likelihood* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ell(\sim, \dagger, <) &= \ln L(\sim, \dagger, <) \\ \ell(\sim, \dagger, <) &= \ln \left\{ \left(\frac{1}{\dagger} \right)^m \prod_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<} - 1} \exp \left[- \prod_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger} \right) \right]^{-\frac{1}{<}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\ell(\sim, \dagger, <) = -m \ln \dagger - \left(1 + \frac{1}{<}\right) \sum_{i=1}^m \ln \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right] - \sum_{i=1}^m \ln \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{\frac{1}{<}} \quad (2.7)$$

Selanjutnya fungsi *ln likelihood* diturunkan terhadap parameter \sim, \dagger dan $<$.

$$\frac{\partial \ell(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim} = \left(\frac{1+<}{\dagger}\right) \sum_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{-1} - \frac{1}{\dagger} \sum_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{\frac{1}{<}-1} = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\sim, \dagger, <)}{\partial \dagger} &= -\frac{m}{\dagger} + (1+<) \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger^2}\right) \left(1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right)^{-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger^2}\right) \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{\frac{1}{<}-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\sim, \dagger, <)}{\partial <} &= \frac{1}{<^2} \sum_{i=1}^m \ln \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right] - \left(\frac{1}{<} + 1\right) \sum_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{-1} \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right]^{\frac{1}{<}} \left[\frac{1}{<^2} \sum_{i=1}^m \ln \left[1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)\right] - \frac{1}{<} \sum_{i=1}^m \frac{\left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)}{1 + < \left(\frac{x_i - \sim}{\dagger}\right)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Berdasarkan hasil turunan pertama terhadap masing-masing parameter pada persamaan (2.8), (2.9), dan (2.10) dapat diketahui bahwa hasil persamaan turunan pertama *ln* fungsi *likelihood* terhadap masing-masing parameter berbentuk tidak *close form* sehingga diselesaikan dengan pendekatan numerik. Pada penelitian ini analisis numerik yang digunakan adalah iterasi Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton. Metode Quasi Newton merupakan perbaikan metode Newton.

Metode Quasi Newton berbeda dalam hal bagaimana matriks Hessian dibentuk dan *diupdate*. Metode Quasi Newton yang paling sederhana adalah dengan menetapkan perkiraan matriks Hessian sebagai matriks identitas. Cara *update* yang paling terkenal adalah dengan metode BFGS yang memiliki sifat *robust*. Iterasi yang digunakan untuk metode Newton adalah pada persamaan (2.11) sebagai berikut

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} - H(\boldsymbol{\mu}^{(k)})^{-1} f(\boldsymbol{\mu}^{(k)}) \text{ dengan:} \quad (2.11)$$

$\boldsymbol{\mu}$ adalah parameter yang diestimasi terdiri dari parameter $\sim, \dagger, <$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim} \\ \frac{\partial \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \dagger} \\ \frac{\partial \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial <} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \sim} \\ \frac{\partial}{\partial \dagger} \\ \frac{\partial}{\partial <} \end{bmatrix} \ln L(\sim, \dagger, <) = \nabla f(\boldsymbol{\mu}) \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim \partial \dagger} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim \partial <} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim \partial \dagger} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \dagger^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \dagger \partial <} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \sim \partial <} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial \dagger \partial <} & \frac{\partial^2 \ln L(\sim, \dagger, <)}{\partial <^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \sim^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \dagger^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial <^2} \end{bmatrix} \ln L(\sim, \dagger, <) \quad (2.13)$$

$$= \nabla \nabla^T f(\boldsymbol{\mu}) = \nabla^2 f(\boldsymbol{\mu})$$

Pada kasus optimasi, metode Newton ini diterapkan pada kondisi $\nabla f(\boldsymbol{\mu}) = 0$, dan Jacobian dari $\nabla f(\boldsymbol{\mu})$ adalah $\nabla^2 f(\boldsymbol{\mu})$ yang biasa disebut matriks Hessian, namun pada metode BFGS Quasi Newton, dilakukan *update* terhadap matriks Hessian, dengan rumus untuk *update* matriks Hessian disajikan pada persamaan (2.14) berikut:

$$A^{k+1} = A^k + \frac{q^{(k)} (q^{(k)})^T}{(q^{(k)})^T u^{(k)}} + \frac{g^{(k)} (g^{(k)})^T}{(u^{(k)})^T g^{(k)}} \quad (2.14)$$

dengan:

$$\begin{aligned} g^{(k)} &= \nabla f\left(\boldsymbol{\mu}^{(k)}\right) \\ q^{(k)} &= \nabla f\left(\boldsymbol{\mu}^{(k+1)}\right) - \nabla f\left(\boldsymbol{\mu}^{(k)}\right) \\ \mathbf{u}^{(k)} &= \Delta \boldsymbol{\mu} \\ \Delta \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)} \\ k &\in \{1, 2, \dots, K\} \end{aligned}$$

Rumus umum untuk metode BFGS Quasi Newton disajikan pada persamaan (2.15) sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \mathbf{r}^{(k)} S^{(k)} \quad (2.15)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(k)} &= \text{step length yang dapat meminimumkan fungsi } f\left(\mathbf{r}^{(k)}\right) = f\left(\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \mathbf{r}^{(k)} S^{(k)}\right) \\ S^{(k)} &= \text{search direction yang didefinisikan } S^{(k)} = -\left(A^{(k)}\right)^{-1} \nabla f\left(\boldsymbol{\mu}^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Iterasi BFGS Quasi Newton dilakukan berulang kali sampai $\left\|\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)}\right\| \leq e$.

Setelah iterasi berhenti, maka diperoleh nilai estimasi untuk masing-masing parameter distribusi GEV $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ untuk $\gamma \neq 0$.

2.4 Uji Kecocokan Distribusi

Uji formal yang digunakan untuk menguji kecocokan adalah uji *Kolmogorov-Smirnov* yang memusatkan perhatian pada simpangan terbesar D (deviasi maksimum), yaitu selisih maksimum dari frekuensi kumulatif distribusi teoritis tertentu $F_0(x)$ dan frekuensi kumulatif empiris $S(x)$.

Pada penelitian ini diuji apakah data curah hujan ekstrem yang datanya tidak berdistribusi normal, dapat didekati dengan distribusi GEV, sehingga hipotesa yang dibangun adalah sebagai berikut:

$$H_0 : S(x) = F_0(x) \text{ (Data mengikuti distribusi yang diduga)}$$

$H_1 : S(x) \neq F_0(x)$ (Data tidak mengikuti distribusi yang diduga)

Dengan statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$D_{hitung} = \text{Max} |S(x) - F_0(x)| \quad (2.16)$$

dengan : $S(x)$ = nilai kumulatif distribusi empiris

$F_0(x)$ = nilai kumulatif distribusi yang diduga.

Hasil statistik uji yaitu D_{hitung} kemudian dibandingkan dengan nilai D_r yang diperoleh dari tabel Kolmogorov-Smirnov pada taraf signifikansi sebesar α . Apabila diperoleh $D_{hitung} < D_r$ atau p-value $> \alpha$ maka gagal tolak H_0 , sehingga benar secara statistik bahwa data pada penelitian ini berdistribusi GEV.

2.5 Spatial Extreme Modeling

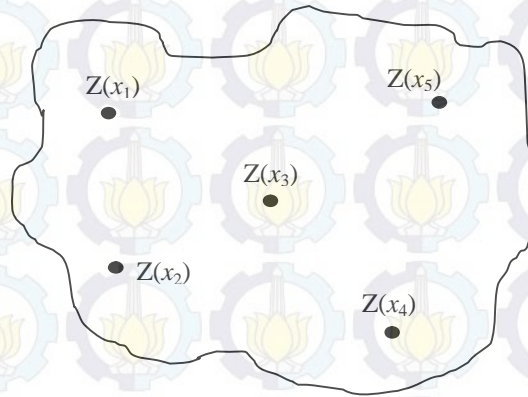
Pada kasus EVT univariat, data ekstrem hanya diukur dan dianalisis pada satu titik atau lokasi, namun kejadian alam seperti suhu, curah hujan, dan angin terjadi karena proses alamiah serta dipengaruhi oleh kondisi suatu tempat (unsur spasial). Curah hujan maksimal dalam satu hari yang terjadi pada satu daerah berbeda dengan daerah lain, demikian juga jumlah hari hujan yang diterima oleh satu wilayah berbeda dengan wilayah lain. Hal ini menunjukkan adanya variabilitas spasial fenomena hujan harian.

Gambar 2.3 menunjukkan ilustrasi data spasial pada suatu lokasi. Misalkan terdapat satu karakteristik atau variabel yang diukur pada titik yang berbeda dalam suatu lokasi dan waktu pengamatan diabaikan. Ada n observasi yang disimbolkan sebagai berikut

$$Z(x_i) \text{ dimana } i=1,2,\dots,n \text{ dengan } x \in D$$

Obyek yang diukur pada region D dianggap bagian dari kumpulan obyek yang lebih besar. Jika obyek yang diamati berupa titik, sangat banyak observasi yang mungkin dalam wilayah. Pada Gambar 2.3 diberikan ilustrasi data spasial

yang diamati pada 5 titik lokasi. Pengamatan pada titik yang berdekatan, misal $Z(x_1)$ dan $Z(x_3)$ atau $Z(x_2)$ dan $Z(x_3)$ memiliki dependensi yang lebih besar dibandingkan pengamatan pada titik yang berjauhan.



Gambar 2.3 Ilustrasi Pengamatan Spasial Tak Beraturan

Dalam konteks spasial unsur yang paling diutamakan adalah bagaimana hubungan (dependensi) antar lokasi atau titik pengamatan. Oleh karena itu, sangat dibutuhkan pengetahuan untuk mempelajari kejadian-kejadian ekstrem, khususnya secara spasial. Teori dan aplikasi statistika *univariate extremes* masih dikembangkan sampai saat ini, namun teori tentang memodelkan data ekstrem secara spasial atau yang dikenal dengan *spatial extremes modeling* juga sudah mulai dikaji.

Metode ini banyak digunakan untuk permasalahan kejadian-kejadian alam atau lingkungan dengan domain spasial. *Spatial extremes modeling* berawal dari pemodelan nilai ekstrem dengan distribusi nilai ekstrem multivariat, sehingga data ekstrem pada beberapa titik lokasi observasi dipandang sebagai variabel multivariat.

Kesulitan utama dalam mempelajari metode *spatial extreme value* adalah kurangnya model yang fleksibel dan metode inferensial yang sesuai. Oleh karena itu, dibutuhkan pendekatan lain salah satunya menggunakan proses *max-stable*. Proses *max-stable* merupakan generalisasi dimensi tak hingga (*infinite dimensional*) dari teori nilai ekstrem EVT dimana sampel diambil dari nilai maksimum (*maxima*) pada setiap lokasi (proses spasial) (Smith, 1990).

2.6 Max-stable Processes

Diketahui X suatu himpunan indeks dan $\{Y_i(x)\}_{x \in X} \quad i=1,2,\dots,n$ dimana n adalah replikasi independen suatu proses stokastik kontinu. Diasumsikan terdapat suatu fungsi kontinu dimana $a_n(x) > 0$ dan $b_n(x) \in R$ seperti persamaan berikut (Malika, 2015):

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i=1}^n Y_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)} \quad x \in X \quad (2.17)$$

jika nilai limit ada (*exist*), maka proses limit $Y(x)$ disebut proses *max-stable*. Dua sifat yang mengikuti proses di atas adalah:

1. Distribusi marginal satu dimensionalnya mengikuti distribusi GEV

$Y \sim GEV(\sim, \dagger, <)$ dengan fungsi distribusi kumulatif berikut:

$$F(y; \sim, \dagger, <) = \exp \left[- \left\{ 1 + \frac{<(y - \sim)}{\dagger} \right\}^{-1/<} \right], \quad -\infty < \sim, < < \infty, \dagger > 0$$

dengan

\sim = parameter lokasi

\dagger = parameter skala (*scale*)

$<$ = parameter bentuk (*shape*)

2. Distribusi marginal k-dimensionalnya mengikuti distribusi *multivariate extreme value*.

Pada persamaan (2.17), jika $a_n(x) = n$ dan $b_n(x) = 0$, maka $\{Z(x)\}_{x \in X}$ adalah proses *max-stable* yang memiliki margin Fréchet unit dengan fungsi distribusi $F(z) = \exp(-1/z)$, $z > 0$. Proses ini dapat diperoleh dengan mentransformasi $\{Y(x)\}_{x \in X}$ menjadi persamaan berikut:

$$\{Z(x)\}_{x \in X} \equiv \left[\left\{ 1 + \frac{<(x)(Y(x) - \sim(x))}{\dagger(x)} \right\}^{1/<(x)} \right]_{x \in X} \quad (2.18)$$

dimana $\tilde{\cdot}(x), <(x), \dagger(x) > 0$ adalah suatu fungsi kontinu dan x merupakan suatu indeks ($x \in X$). Proses Z ini juga disebut proses *max-stable* (Padoan, Ribatet dan Sisson, 2010).

Masing-masing parameter distribusi GEV yaitu $\tilde{\cdot}, \dagger, <$ berubah menjadi $\tilde{\cdot}(x), <(x), \dagger(x)$ untuk setiap $x \in X$ dengan menambahkan aspek spasial *varying surfaces*. Model *surfaces* yang terbentuk bergantung pada variabel penjelas seperti, lokasi (lintang dan bujur), ketinggian atau jarak, dan unsur cuaca/iklim.

2.6.1 Model Smith

Smith (1990) memperkenalkan salah satu model *spatial extreme value* yang disebut model *Smith*. Misalkan $\{(\xi_i, y_i), i \geq 1\}$ merupakan proses Poisson pada $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ dengan intensitas pengukuran $\xi^{-2} d\xi v(dy)$, di mana $v(dy)$ adalah ukuran Lebesgue pada \mathbb{R}^d . Salah satu karakterisasi dari *max-stable process* dengan satuan margin Fréchet adalah

$$Z(x) = \text{Max} \{ \xi, f(y, x) \}, x \in \mathbb{R}^d \quad (2.19)$$

dengan $\{f(y, x), x, y \in \mathbb{R}^d\}$ merupakan fungsi non-negatif

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) v(dy) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (2.20)$$

Definisi persamaan (2.20) masih umum dan model Smith dengan pengaturan tertentu $v(dy)$ adalah ukuran Lebesgue dan $f(y, x) = f_0(y-x)$, di mana $f_0(y-x)$ adalah densitas normal multivariat dengan mean nol dan matriks kovarians $^{-1}$. Bentuk CDF bivariat dari model Smith seperti ditunjukkan persamaan (2.21) adalah sebagai berikut:

$$\Pr[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right] \quad (2.21)$$

adalah fungsi distribusi kumulatif standar normal dan untuk dua lokasi tertentu 1 dan 2 (Anindita, 2015).

2.6.2 Model Schlather

Schlather (2002) memperkenalkan salah satu model *max-stable* yang disebut model *Schlather*. Diberikan $Y(\cdot)$ adalah suatu proses stasioner dimana $E[\max\{0, Y(x)\}] = 1$ dan $\{Y_i, i \geq 1\}$ adalah proses poisson dengan ukuran intensitas $y^{-2} dy$. Schlather menunjukkan bahwa proses stasioner *max-stable* dengan margin Frechet unit didefinisikan sebagai berikut:

$$Z(x) = \max_i Y_i(x) \quad (2.22)$$

dimana $Y_i(\cdot)$ adalah replikasi identik independen dari $Y(\cdot)$.

Persamaan (2.20) masih sangat umum dan membutuhkan asumsi tambahan untuk mendapatkan model praktis. Schlather mengusulkan $Y_i(\cdot)$ sebagai proses gaussian stasioner dengan fungsi korelasi $\dots(h)$. Dengan tambahan asumsi tersebut, maka dapat ditunjukkan proses CDF bivariat sebagai berikut:

$$\Pr[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\dots(h) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right] \quad (2.23)$$

dimana h adalah jarak *euclid* antara lokasi 1 dan lokasi 2 (Malika, 2015).

Fungsi korelasi yang digunakan dalam penelitian ini merupakan fungsi korelasi untuk data spasial yang didasarkan pada pengukuran jarak. Terdapat beberapa fungsi korelasi $\dots(h)$ yang berasal dari keluarga parametrik yang dapat digunakan antara lain (Ribatet, 2009) :

$$1. \text{ Whittle-Matern} \quad : \dots(h) = c_1 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{c_2} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{h}{c_2} \right), \quad \nu > 0$$

$$2. \text{ Cauchy} \quad : \dots(h) = c_1 \left[1 + \left(\frac{h}{c_2} \right)^2 \right]^{-\nu}, \quad \nu > 0$$

$$3. \text{ Powered Exponential} \quad : \dots(h) = c_1 \exp \left[- \left(\frac{h}{c_2} \right)^\nu \right], \quad 0 < \nu \leq 2$$

$$4. \text{ Bessel} \quad : \dots(h) = c_1 \left(\frac{2c_2}{h} \right)^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu \left(\frac{h}{c_2} \right), \quad \nu \geq \frac{d-2}{2}$$

dengan

Γ adalah fungsi gamma, K_ν adalah fungsi *Bessel* yang sudah dimodifikasi jenis ketiga dengan derajat ν , J_ν adalah fungsi *Bessel* order ν , dan d adalah dimensi.

c_1 : Parameter *sill*, dengan $0 < c_1 \leq 1$

c_2 : Parameter *range*, dengan $c_2 > 0$

ν : Parameter *smooth*

2.6.3 Model *Brown-Resnick*

Model *max-stable processes Brown-Resnick* dikemukakan oleh Brown dan Resnick (1977) dan digeneralisasi oleh Kabluchko, Schlather dan de Haan (2009) dengan mendefinisikan struktur dependensi $W_i(x) = \exp(\nu_i(x) - \chi(x))$ sehingga menjadi persamaan (2.24).

$$Z(x) = \max_i \exp(\nu_i(x) - \chi(x)), x \in X \quad (2.24)$$

ν_i adalah proses Gaussian dengan rata-rata nol dengan komponen semivariogram $\chi(h)$, dimana $\nu(0) = 0$. Model *Brown-Resnick* memiliki fungsi distribusi kumulatif bivariat yang didefinisikan pada persamaan (2.25) :

$$F(z_1, z_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \right) \right\} \quad (2.25)$$

dengan $a(h) = \sqrt{2\chi(h)}$ (Ramadani, 2015)

2.6.4 Model *Geometric Gaussian*

Model *Geometric Gaussian* dikemukakan oleh Davison, Padoan dan Ribatet (2010) dengan mendefinisikan struktur dependensi sesuai persamaan $W_i(x) = \exp(\tau \nu(x) - \tau^2 / 2)$ sehingga menjadi persamaan (2.26) sebagai berikut:

$$Z(x) = \max_i \exp(\tau \nu_i(x) - \tau^2 / 2), x \in X \quad (2.26)$$

v_i adalah proses standar Gaussian dengan rata-rata nol dengan komponen fungsi korelasi $\dots(h)$, dimana $v(0)=0$, sehingga bentuk CDF yang mengacu pada model Smith menjadi persamaan berikut:

$$\Pr[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] = \exp \left[-\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right]$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi Normal standart dan

$$a^2 = 2\tau^2(1 - \dots(h)) \text{ maka } a = \tau \sqrt{2(1 - \dots(h))}$$

Sehingga persamaan menjadi :

$$\begin{aligned} \Pr[Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2] \\ = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{\tau \sqrt{2(1 - \dots(h))}}{2} + \frac{1}{\tau \sqrt{2(1 - \dots(h))}} \log \frac{z_2}{z_1} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{\tau \sqrt{2(1 - \dots(h))}}{2} + \frac{1}{\tau \sqrt{2(1 - \dots(h))}} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.7 Spatial Dependence

Dalam pemodelan data spasial, pembahasan utamanya adalah dapat mengetahui bagaimana keterkaitan atau mengukur dependensi antar data secara spasial. Metode yang paling umum digunakan untuk mengetahui dependensi spasial adalah semi-variogram(x), untuk data spasial non-ekstrem. Diberikan $Z(\cdot)$ suatu proses gaussian stasioner dengan fungsi korelasi dan varians 2 , maka semi-variogram disebut sebagai ukuran dependensi spasial untuk $Z(\cdot)$ yang didefinisikan dengan persamaan (2.28) sebagai berikut

$$\gamma(x_1 - x_2) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(x_1) - Z(x_2)] = \frac{1}{2} E[Z(x_1) - Z(x_2)]^2 \quad (2.28)$$

dimana x_1 dan x_2 menunjukkan lokasi 1 dan lokasi 2, sedangkan $Z(x_1)$ dan $Z(x_2)$ adalah proses gaussian stasioner pada lokasi 1 dan lokasi 2.

Semi-variogram tidak dapat digunakan untuk mengukur dependensi spasial untuk data ekstrem. Oleh karena itu, diperlukan pengembangan lebih yang sesuai untuk mengukur dependensi spasial proses *max-stable*. Ada beberapa metode untuk mengukur dependensi spasial salah satunya dengan koefisien ekstremal.

2.7.1 Koefisien Ekstremal

Diberikan $Z(\cdot)$ suatu proses *max-stable* dengan margin Frechet unit, fungsi koefisien ekstremal $\eta(\cdot)$ didefinisikan dengan persamaan (2.29) berikut:

$$\Pr[Z(x_1) \leq z, Z(x_2) \leq z] = \exp\left\{-\frac{\eta(x_1 - x_2)}{z}\right\} \quad (2.29)$$

Schlather dan Tawn (2003) menyebutkan $\eta(\cdot)$ disebut fungsi koefisien ekstremal yang dapat memberikan informasi terkait dependensi pada data ekstrem. Fungsi koefisien ekstremal untuk model *max-stable* dapat diturunkan secara langsung dari distribusi bivariatnya dimana $z_1 = z_2 = z$ sehingga diperoleh fungsi koefisien ekstremal untuk model pada *max-stable processes* sebagai berikut:

Model *Smith* : $\eta(x_1 - x_2) = 2\Phi\left\{\sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^T \Sigma^{-1}(x_1 - x_2)}{2}}\right\}$

Model *Schlather* : $\eta(x_1 - x_2) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \dots(x_1 - x_2)}{2}}$

Model *Geometrik Gaussian* : $\eta(x_1 - x_2) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{\tau^2 \{1 - \dots((x_1 - x_2))\}}{2}}\right)$

Model *Brown-Resnick* : $\eta(x_1 - x_2) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{\chi^2 \{x_1 - x_2\}}{2}}\right)$

Jika $_{\alpha}(x_1 - x_2) = 1$ maka kesimpulannya dependen, sehingga

$$\Pr[Z(x_1) \leq z, Z(x_2) \leq z] = \exp(-1/z) = \Pr[Z(x_1) \leq z] \quad (2.30)$$

sedangkan jika $_{\alpha}(x_1 - x_2) = 2$ maka dapat disimpulkan tidak dependen sehingga

$$\Pr[Z(x_1) \leq z, Z(x_2) \leq z] = \exp(-2/z) = \Pr[Z(x_1) \leq z] \Pr[Z(x_2) \leq z] \quad (2.31)$$

Jika $Z(x)$ mengikuti distribusi marginal Frechet, maka $\frac{1}{Z(x)}$ berdistribusi exponential dan $\frac{1}{\max\{Z(x_1), Z(x_2)\}}$ berdistribusi exponential dengan mean $\frac{1}{_{\alpha}(x_1 - x_2)}$. Dalam konteks ini, $Z(x)$ adalah hasil transformasi dalam bentuk marginal Frechet dengan metode *maximum likelihood*, maka berlaku $\sum_{i=1}^n 1/Z_i(x_1) = \sum_{i=1}^n 1/Z_i(x_2) \approx n$ dan estimasi untuk koefisien eksternal disajikan pada persamaan (2.32).

$$\hat{_{\alpha}}(x_1 - x_2) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \min\{Z_i(x_1)^{-1}, Z_i(x_2)^{-1}\}} \quad (2.32)$$

dengan

x_1 : Lokasi 1

x_2 : Lokasi 2

n : Jumlah observasi

$Z_i(x_1)$: Proses *max-stable* dengan margin frechet pada observasi ke- i lokasi-1

$Z_i(x_2)$: Proses *max-stable* dengan margin frechet pada observasi ke- i lokasi-2

2.8 Estimasi Parameter Distribusi GEV Spasial dengan *Maximum Pairwise Likelihood Estimation* (MPLE)

Statistika inferensi untuk model parametrik idealnya dilakukan menggunakan fungsi *likelihood*. Misalkan diketahui $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ adalah stasiun pengamatan curah hujan yang digunakan untuk penelitian. Perhitungan *likelihood* membutuhkan fungsi probabilitas bersama (*joint density*) dari $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$, namun hal tersebut menghasilkan persamaan yang sangat kompleks sehingga sulit dilakukan dalam proses estimasinya. Beberapa pendekatan metode mulai dikembangkan oleh beberapa peneliti, salah satunya Padoan, Ribatet, dan Sisson (2010) mengusulkan untuk mengubah fungsi *likelihood* lengkap (*full likelihood*) dengan *pairwise likelihood*.

Model spasial GEV didefinisikan oleh persamaan (2.33) sebagai berikut

$$Z(x) \sim GEV(\tilde{\gamma}(x), \dagger(x), \prec(x)) \quad (2.33)$$

Untuk memodelkan dependensi spasial, terdapat beberapa model *trend surface*, yaitu model linier dengan mengombinasikan komponen spasial koordinat lintang dan bujur. Model umum *trend surface* adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(x) &= S_{0,\tilde{\gamma}} + S_{1,\tilde{\gamma}}lon(x) + S_{2,\tilde{\gamma}}lat(x) \\ \dagger(x) &= S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x) \\ \prec(x) &= S_{0,\prec} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Menurut Ribatet (2013), parameter bentuk (*shape*) $\prec(x)$ cenderung terlalu kompleks karena parameter ini memiliki ketidakpastian (*uncertainties*) yang cukup besar sehingga diasumsikan konstan. Hal utama yang diperhatikan dalam estimasi parameter *max stable processes* adalah adanya fungsi distribusi dengan dimensi terbatas (*finite dimension*) sehingga estimasi akan sulit untuk dilakukan untuk data spasial. Metode *full likelihood* dalam perhitungannya memerlukan fungsi densitas gabungan. Namun pada MSP, tidak didapatkan fungsi densitas gabungan karena jumlah variabel lokasi (D) yang besar. Karena itu, digunakan metode *Pairwise Likelihood* dimana hanya fungsi densitas *pairwise* yang diperlukan.

Estimasi menggunakan *maximum pairwise likelihood* perlu memaksimumkan persamaan (2.35). Keuntungan estimasi menggunakan fungsi *likelihood* adalah mudah untuk dikembangkan untuk model statistik yang lebih kompleks. Misal pada proses *max-stable* sederhana dengan margin unit frechet, maka asumsi ini jelas tidak realistis jika diterapkan dalam aplikasi pemodelan spasial ekstrem, dimana diharapkan suatu kejadian ekstrem dapat bervariasi secara spasial.

Diketahui $\{Z(x), x \in X\}$ adalah suatu proses *max-stable* sedemikian hingga $Z(x) \sim GEV\{\sim(x), \dagger(x), \prec(x)\}$ untuk setiap $x \in X$ dan membentuk suatu pemetaan sebagai berikut

$$t_x : z \rightarrow \left\{ 1 + \prec(x) \left(\frac{z - \sim(x)}{\dagger(x)} \right) \right\}^{1/\prec(x)} \quad (2.35)$$

maka proses stokastik $\{t_x\{Z(x)\}, x \in X\}$ adalah proses *max-stable* dan fungsi *logpairwise likelihood* untuk Z seperti pada persamaan (2.26) sebagai berikut.

$$\ell_p\{\boldsymbol{\eta}\} = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\log f\left\{t_x(z_\ell(x_i)), t_x(z_\ell(x_j)); \boldsymbol{\eta}\right\} + \log \left| J\{z_\ell(x_i)\} J\{z_\ell(x_j)\} \right| \right] \quad (2.36)$$

dengan $\boldsymbol{\eta}$ = Parameter yang diestimasi

$J\{z_\ell(x_i)\}$ = Jacobian pada lokasi- i dari pemetaan t_x

$J\{z_\ell(x_j)\}$ = Jacobian pada lokasi- j dari pemetaan t_x

Apabila diterapkan pada studi kasus curah hujan maka diketahui $z_k(x_i)$ adalah observasi ke- k pada stasiun curah hujan ke- i yang ditransformasikan ke dalam Frechet unit dimana $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ adalah banyaknya pengamatan dan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ adalah banyaknya stasiun curah hujan yang diamati. Misalkan $\boldsymbol{\eta}$ adalah parameter yang diestimasi, maka fungsi *pairwise marginal log-likelihood* disajikan pada persamaan (2.37) sebagai berikut.

$$\ell_p \left\{ \boldsymbol{\eta}; z_1(x), \dots, z_K(x) \right\} = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \log f \left\{ z_k(x_i), z_k(x_j); \boldsymbol{\eta} \right\} \quad (2.37)$$

dengan:

$\ell_p = \log\text{-likelihood pairwise}$

$f \left\{ z_k(x_i), z_k(x_j) \right\} = \text{PDF bivariat proses } \textit{max-stable} \text{ marginal Frechet.}$

2.9 Pemilihan Model Terbaik

. Kriteria pemilihan model memiliki peran penting dalam menentukan model yang terbaik. Pada beberapa konteks tertentu, memilih model yang sederhana lebih baik daripada model yang kompleks. Menurut Padoan, Ribatet, dan Sisson (2010) mengusulkan menggunakan kriteria *composite likelihood information* yang dikembangkan menjadi *Takeuchi Information Criterion* (TIC) (Takeuchi, 1976) dan didefinisikan dengan persamaan (2.38) sebagai berikut

$$TIC = -2\ell_p \left(\hat{\boldsymbol{\eta}} \right) + 2tr \left\{ H \left(\hat{\boldsymbol{\eta}} \right)^{-1} J \left(\hat{\boldsymbol{\eta}} \right) \right\} \quad (2.38)$$

dimana H merupakan matriks informasi dan H^{-1} menunjukkan varians parameter yang diestimasi, serta J menunjukkan *square score statistic* yang masing-masing didefinisikan pada persamaan (2.39) dan (2.40) sebagai berikut

$$H \left(\boldsymbol{\eta} \right) = - \sum_{k=1}^K \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \log f \left(z_{ik}, z_{jk}; \boldsymbol{\eta} \right)}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}^T} \quad (2.39)$$

$$J \left(\boldsymbol{\eta} \right) = - \sum_{k=1}^K \sum_{i < j} \frac{\partial \log f \left(z_{ik}, z_{jk}; \boldsymbol{\eta} \right)}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \log f \left(z_{ik}, z_{jk}; \boldsymbol{\eta} \right)}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \quad (2.40)$$

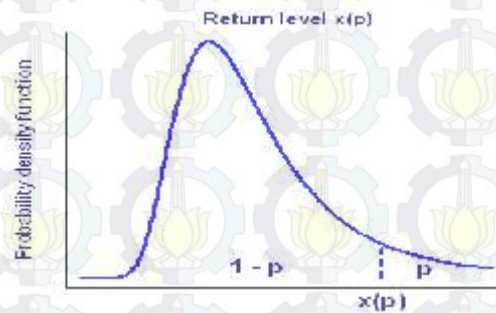
dan $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ adalah estimator *Maximum pairwise likelihood*.

TIC merupakan pengembangan dari *Akaike Information Criterion* (AIC). Seperti halnya pada AIC, pada dasarnya TIC juga menggunakan konsep entropi informasi, yaitu ukuran relatif dari informasi yang hilang ketika sebuah model yang diberikan digunakan untuk menggambarkan data sebenarnya.

Konsep tersebut untuk menggambarkan bias dan varians dalam konstruksi model, atau dengan kata lain menjelaskan tentang akurasi dan kompleksitas model. Nilai TIC yang lebih rendah menunjukkan model yang lebih baik.

2.10 Return Level

Hal yang menarik dalam kajian *extreme value theory* dalam bidang klimatologi selain untuk menaksir parameter adalah menentukan *return level*. Begitu pula pada pemodelan spasial ekstrem, tidak cukup hanya mengetahui dependensi spasialnya. *Return level* adalah nilai maksimum pada periode mendatang. Konsep *return level* dan periode ulang biasanya digunakan untuk menyampaikan informasi tentang kemungkinan peristiwa langka seperti banjir.



Gambar 2.4 Ilustrasi *Return Level*
(Sumber : Mallor, Nualart dan Omey, 2009)

Gambar 2.4 menunjukkan ilustrasi return level pada titik $x(p)$. *Return level* dengan periode ulang $T=1/p$ tahun adalah ambang batas tinggi $x(p)$ dengan peluang terlampaui adalah p . Sebagai contoh, jika $p = 0,01$, maka periode ulangnya $T = 100$ tahun. Dua interpretasi umum *return level* dengan periode ulang T tahun adalah:

- (i) Waktu tunggu rata-rata sampai terjadinya kejadian berikutnya adalah T tahun
- (ii) Jumlah rata-rata peristiwa yang terjadi dalam jangka waktu T -tahun adalah satu

Nilai *return level* dapat memberikan informasi yang sangat penting, baik dalam bidang ekonomi, keuangan, dan asuransi, serta klimatologi. Pada bidang asuransi, *return level* digunakan untuk mengukur seberapa besar resiko yang ditanggung perusahaan asuransi dari klaim yang dianggap ekstrem atau

melebihi rata-rata klaim lainnya sebagai salah satu upaya untuk menjaga portofolio perusahaannya. Dalam bidang ekonomi dan keuangan, nilai *return level* dapat mengetahui tingkat resiko saham yang diperlukan oleh para investor untuk menentukan saat yang tepat untuk berinvestasi.

Dalam konteks spasial ekstrem, khususnya proses *max-stable*, *return level* dengan *return period* T-year ditentukan dengan *Pointwise quantile* dengan persamaan (2.41) sebagai berikut (Ribatet, 2009):

$$z_T(x) = \hat{\sim}(x) + \hat{\uparrow}(x) \frac{\left\{ -\log \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right\}^{-\hat{\prec}(x)} - 1}{\hat{\prec}(x)} \quad (2.41)$$

dimana T adalah periode ulang dalam satuan tahun dan $\hat{\sim}(x), \hat{\prec}(x), \hat{\uparrow}(x)$ adalah parameter lokasi, bentuk (*shape*), skala yang diperoleh pada persamaan (2.34).

2.11 Root Mean Square Error (RMSE)

Untuk validasi model, digunakan tolak ukur RMSE untuk mengukur kinerja dari model *Geometric Gaussian*. Rumus RMSE secara umum adalah sebagai berikut :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^m (z_p - \hat{z}_p)^2}{m}} \quad (2.42)$$

Dimana z_p merupakan nilai observasi aktual yang didapat dari data *testing*, sedangkan \hat{z}_p merupakan nilai dugaan atau prediksi.

2.12 Curah Hujan

Curah hujan (mm) adalah ketinggian air hujan yang terkumpul dalam tempat yang datar, tidak menguap, tidak meresap, dan tidak mengalir. Curah hujan 1 milimeter artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air setinggi satu millimeter atau tertampung air sebanyak satu liter. Curah hujan dapat diukur dalam harian, bulanan, atau tahunan. Pada umumnya wilayah Indonesia dibagi menjadi 3 (tiga) pola hujan, yaitu:

1. Tipe ekuatorial

Pola ekuatorial dicirikan oleh tipe curah hujan dengan bentuk bimodial (dua puncak hujan) yang biasanya terjadi sekitar bulan Maret dan Oktober atau pada saat terjadi ekinoks. Di Indonesia, curah hujan yang mengikuti pola ini terjadi di sebagian besar wilayah Sumatra dan Kalimantan.

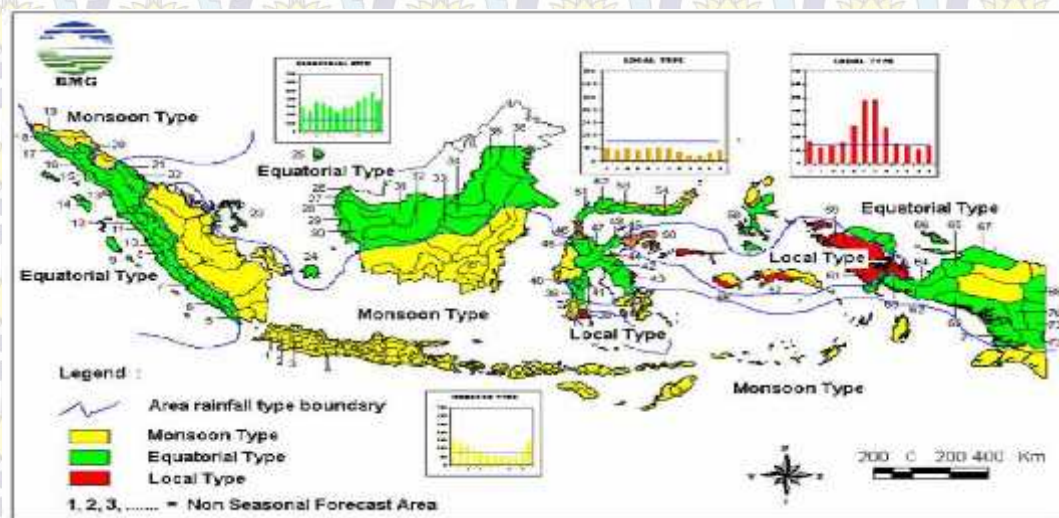
2. Tipe *monsoon*

Curah hujan dipengaruhi oleh tiupan angin *monsoon* dan bersifat unimodial (satu puncak musim hujan, DJF (Desember-Januari-Februari) musim hujan, JJA (Juni-Juli-Agustus) musim kemarau). Tipe hujan ini terjadi di wilayah Indonesia bagian selatan, seperti di ujung Pulau Sumatra bagian selatan, Jawa, Bali, Nusa Tenggara dan Maluku selatan.

3. Tipe lokal

Pola curah hujan lokal memiliki distribusi hujan bulanan kebalikan dengan pola *monsoon*, dicirikan oleh bentuk pola hujan unimodial (satu puncak hujan), tetapi bentuknya berlawanan dengan tipe hujan monsun. Tipe curah hujan ini banyak terjadi di Maluku, Papua, dan sebagian Sulawesi.

Secara umum masing-masing tipe curah hujan di Indonesia yang telah diuraikan di atas, diperjelas dalam Gambar 2.5 di bawah ini dengan wilayah berwarna kuning merupakan tipe *Monsoon*, warna hijau tipe *equatorial*, dan warna merah merupakan tipe *local*.



(Sumber: BMKG, dalam Kadarasah 2007)

Gambar 2.5 Pola Curah Hujan di Indonesia

2.12.1 Curah Hujan Ekstrem

Curah hujan dengan intensitas > 50 milimeter/hari menjadi parameter terjadinya hujan dengan intensitas lebat. Sedangkan curah hujan ekstrem memiliki curah hujan > 100 milimeter/hari. Daerah di Indonesia yang memiliki curah hujan paling tinggi ialah Baturaden, Jawa Tengah dengan intensitas curah hujan mencapai 7.069 mm/tahun

2.13 Zona Musim

Berdasarkan BMKG zona musim merupakan pembagian daerah-daerah di Indonesia berdasarkan pola distribusi curah hujan rata-rata bulanan. Daerah yang memiliki batas yang jelas secara klimatologis antara periode musim hujan dan periode musim kemarau disebut dengan daerah Zona Musim (ZOM). Kabupaten Lamongan berada di ZOM 150 (Gresik bagian utara dan timur, Lamongan bagian tengah) dan ZOM 151 (Lamongan bagian tengah dan timur). Wilayah yang berada pada ZOM yang sama atau berdekatan memiliki karakteristik curah hujan yang hampir sama.

BAB 3

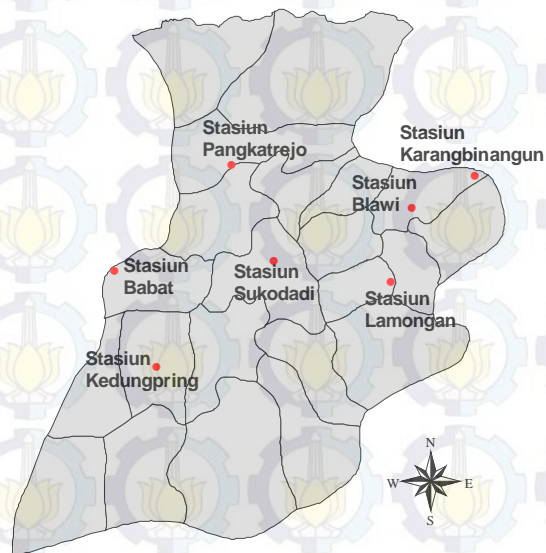
METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang bersumber dari Badan Meteorologi, Klimatologi dan Geofisika (BMKG) di Karangploso Malang, berupa data curah hujan harian di tujuh stasiun pengamatan pengukuran curah hujan di Kabupaten Lamongan tahun 1981-2012.

1. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Babat
2. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Blawi
3. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Karangbinangun
4. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Kedungpring
5. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Lamongan
6. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Pangkatrejo
7. Stasiun Pengamatan Curah Hujan Sukodadi

Lokasi masing-masing stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan ditunjukkan melalui Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Lokasi Pos Curah Hujan di Kabupaten Lamongan

Data dibagi menjadi dua, yaitu data *learning* untuk analisis dan data *testing* untuk validasi model. Data yang digunakan untuk analisis adalah data curah hujan harian tahun 1981-2010, sedangkan untuk validasi digunakan data tahun 2011-2012. Detai data terdapat pada Lampiran A dan struktur data yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian

Obs ke-	Stasiun 1 ($u_1 \ v_1$)	Stasiun 2 $u_2 \ v_2$	Stasiun 3 $u_3 \ v_3$	Stasiun 4 $u_4 \ v_4$	Stasiun 5 $u_5 \ v_5$	Stasiun 6 $u_6 \ v_6$	Stasiun 7 $u_7 \ v_7$
1	x_{111}	x_{221}	x_{331}	x_{441}	x_{551}	x_{661}	x_{771}
2	x_{112}	x_{222}	x_{332}	x_{442}	x_{552}	x_{662}	x_{772}
3	x_{113}	x_{223}	x_{333}	x_{443}	x_{553}	x_{663}	x_{773}
4	x_{114}	x_{224}	x_{334}	x_{444}	x_{554}	x_{664}	x_{774}
5	x_{115}	x_{225}	x_{335}	x_{445}	x_{555}	x_{665}	x_{775}
6	x_{116}	x_{226}	x_{336}	x_{446}	x_{556}	x_{666}	x_{776}
7	x_{117}	x_{227}	x_{337}	x_{447}	x_{557}	x_{667}	x_{777}
8	x_{118}	x_{228}	x_{338}	x_{448}	x_{558}	x_{668}	x_{778}
9	x_{119}	x_{229}	x_{339}	x_{449}	x_{559}	x_{669}	x_{779}
10	x_{1110}	x_{2210}	x_{3310}	x_{4410}	x_{5510}	x_{6610}	x_{7710}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	x_{11n}	x_{22n}	x_{33n}	x_{44n}	x_{55n}	x_{66n}	x_{77n}

Variabel geografis yang menunjukkan lokasi stasiun curah hujan di Kabupaten Lamongan ditunjukkan oleh garis lintang selatan (*latitude*) u_i dan garis bujur timur (*longitude*) v_i dengan $i=1,2,\dots,7$. Tabel 3.1 diantaranya menjelaskan bahwa :

x_{111} = Observasi ke-1 dengan garis lintang selatan dan garis bujur timur lokasi stasiun 1

x_{222} = Observasi ke-2 dengan garis lintang selatan dan garis bujur timur lokasi stasiun 2

x_{333} = Observasi ke-3 dengan garis lintang selatan dan garis bujur timur lokasi stasiun 3

x_{77n} = Observasi ke-n dengan garis lintang selatan dan garis bujur timur lokasi stasiun 7

3.2 Metode Analisis Data *Max-Stable Processes* Model *Geometric Gaussian*

Berikut ini adalah langkah-langkah analisis data untuk setiap tujuan penelitian:

1. Prosedur *max-stable processes* model *Geometric Gaussian*

Secara umum prosedur *max-stable processes* model *Geometric Gaussian* adalah untuk mengkaji estimasi parameter pada distribusi GEV spasial dengan MPLE yang pada akhirnya untuk memperoleh nilai *return level* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Memformulasikan fungsi PDF bivariat untuk *max-stable processes* model *Geometric Gaussian* dengan cara membuat turunan fungsi CDF bivariat model-model tersebut.
- b. Memaksimumkan fungsi *pairwise likelihood* dengan cara membuat \ln fungsi *pairwise likelihood*, dan membuat turunan pertama terhadap setiap parameter yang diestimasi kemudian dibuat sama dengan nol.
- c. Menaksir parameter $\sim, \uparrow, <$ distribusi GEV secara univariat untuk masing-masing lokasi menggunakan MLE.
- d. Pemeriksaan kesesuaian distribusi GEV menggunakan pengujian hipotesis dengan uji *Kolmogorov-Smirnov*.
- e. Melakukan transformasi data ekstrem curah hujan ke distribusi Frechet menggunakan persamaan transformasi berikut.

$$Z(x_i) = \left(1 + \hat{\sim} \frac{y - \hat{\sim}}{\uparrow} \right)^{1/\hat{\sim}}$$

dimana y adalah sampel ekstrem curah hujan, x_i menunjukkan lokasi stasiun pengamatan curah hujan ke- i dan $\hat{\sim}, \uparrow, \hat{\sim}$ parameter dari GEV.

- f. Mengestimasi koefisien ekstremal untuk identifikasi dependensi spasial.
- g. Melakukan penaksiran parameter dependensi untuk model *Schlather* dan *Geometric Gaussian* dengan 4 fungsi korelasi (*whittle-matern*, *powered exponential*, *cauchy*, *bessel*). Fungsi korelasi terbaik dipilih berdasarkan kriteria TIC.
- h. Memilih model *trend surface* terbaik dari sembilan kombinasi model melalui nilai TIC terkecil dengan kombinasi sebagai berikut:

Tabel 3.2 Kombinasi Model Trend Surface

No.	$\sim(x)$	$\dagger(x)$
1.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
2.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
3.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
4.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$
5.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$
6.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
7.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
8.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
9.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$

- i. Estimasi parameter model *trend surface* dengan *fitting max-stable processes* model *Geometric Gaussian* menggunakan metode *MPLE* menggunakan persamaan :

$$\ell_p \{n; z_1(x), \dots, z_n(x)\} = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \log f \{z_k(x_i), z_k(x_j); n\}$$

Sehingga dari parameter *trend surface* yang diperoleh digunakan untuk mendapatkan parameter model *Geometric Gaussian* yaitu

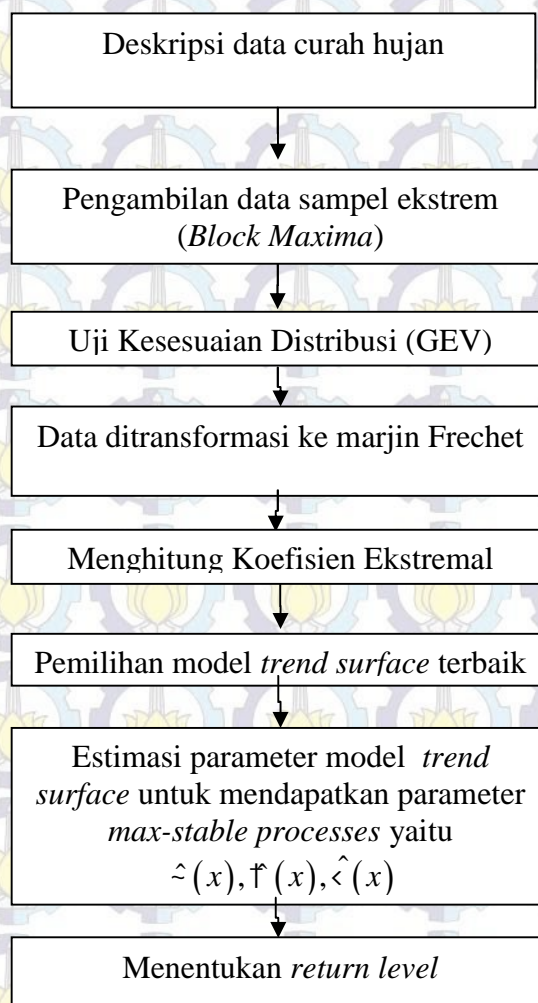
$$\hat{z}(x), \hat{\dagger}(x), \hat{\angle}(x)$$

- j. Menentukan *Return Level* masing-masing lokasi.
- k. Menghitung RMSE model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*
2. Langkah-langkah untuk menerapkan pemodelan *max-stable processes* pada data curah hujan di Kabupaten Lamongan yaitu :
- a. Melakukan pra-pemrosesan data dengan mengidentifikasi *missing value*, dan observasi yang tidak sesuai dari data curah hujan di Lamongan.
- b. Mengidentifikasi karakteristik curah hujan di Kabupaten Lamongan dengan langkah sebagai berikut.

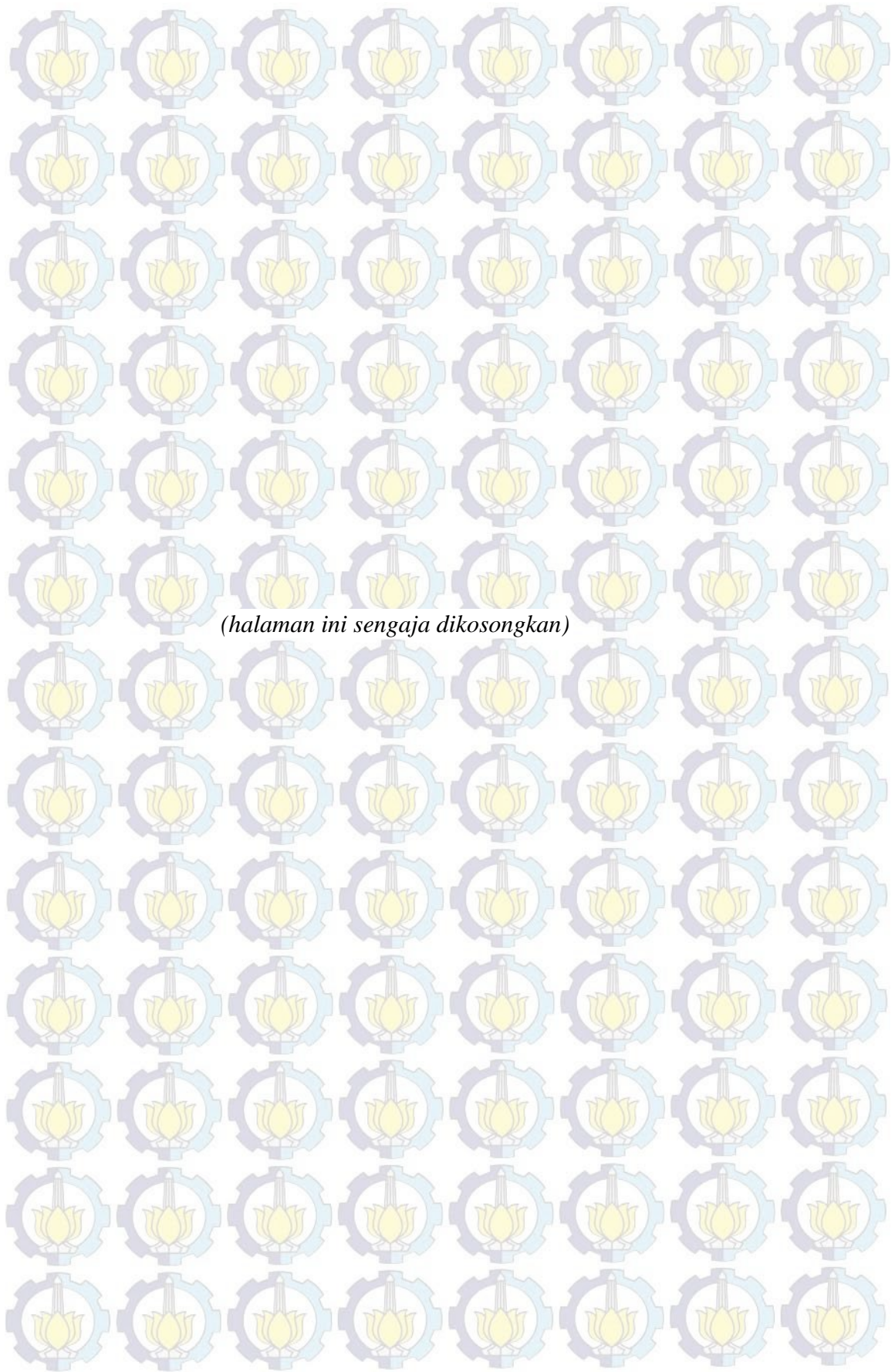
- Mendeskripsikan data curah hujan dengan statistika deskriptif dan pola sebaran curah hujan pada setiap stasiun pengamatan curah hujan.
- Mengidentifikasi distribusi data curah hujan di masing-masing stasiun pengamatan untuk mengetahui adanya distribusi data *heavy tail*.

c. Sampel data ekstrem didapatkan dengan cara membuat blok periode 3 bulanan (DJF, MAM, JJA dan SON) pada data curah hujan periode 1981-2010. Setelah blok terbentuk maka dapat menentukan nilai-nilai yang paling tinggi (maksimum) setiap blok. Nilai tersebut yang disebut data ekstrem dan selanjutnya yang dianalisis mengikuti langkah 1. e - j. Hasil akhir *return level* yang diperoleh dapat dibandingkan antar masing-masing model *max-stable*.

Langkah-langkah analisis data digambarkan pada diagram alir Gambar 3.2:



Gambar 3.2 Diagram Alir Analisis Data



(halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini secara umum mengkaji estimator model *Geometric Gaussian* untuk mendapatkan prediksi *return level* curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Pada penelitian sebelumnya oleh Anindita Reza (2015), Malika Rosna (2015) dan Ramadani Ikha (2015) data curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan tersebut telah dianalisis masing-masing menggunakan model *Smith*, *Schlather* dan *Brown-Resnick*. Ditemukan model *trend surface* terbaik yang berbeda-beda pada ketiga model tersebut yang dijadikan acuan untuk menentukan *return level*.

Penelitian ini menganalisis dengan prosedur yang sama untuk mendapatkan *trend surface* bagi model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* sebagai acuan untuk memprediksi *return level*. Tahap analisis data diawali dengan statistika deskriptif untuk mengetahui karakteristik dan pola curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Setelah itu, melakukan pengujian kesesuaian distribusi serta identifikasi nilai ekstrem dengan metode *block maxima*. Kemudian menentukan koefisien ekstermal dan memilih model *trend surface* terbaik, serta melakukan estimasi parameter dengan mengkombinasikan fungsi korelasi pada masing-masing model *max-stable* dan terakhir mendapatkan *return level*. Langkah estimasi parameter pada *max-stable processes* adalah dengan metode MPLE. Penurunan estimasi parameter pada model *Smith*, *Schlather* dan model *Brown-Resnick* tidak dibahas pada bagian ini karena sudah dijabarkan pada tesis sebelumnya, sehingga hanya estimasi parameter pada model *Geometric Gaussian* yang dibahas.

Analisis data pada penelitian ini adalah mengolah data curah hujan di Kabupaten Lamongan periode tahun 1981-2010 untuk mendapatkan nilai prediksi *return level* pada periode ulang yang ditentukan. Sebagai validasi untuk menguji kebaikan model yang diperoleh adalah data curah hujan Kabupaten Lamongan periode 2011-2012.

4.1 Estimasi Parameter Model *Geometric Gaussian*

Model *Geometric Gaussian* dikemukakan oleh Davison, Padoan dan Ribatet (2010) dengan mendefinisikan suatu struktur dependensi yaitu $W_i(x) = \exp(\sigma \varepsilon_i(x) - \sigma^2 / 2)$ sehingga menjadi persamaan sebagai berikut:

$$Z(x) = \max_i \xi_i \exp(\sigma \varepsilon_i(x) - \sigma^2 / 2), x \in X.$$

ε_i adalah *standard Gaussian process* (Ribatet) dengan rata-rata nol dengan komponen fungsi korelasi $\rho(h)$, dimana $\varepsilon(0) = 0$ dan pemodelan spasial GEV sebagaimana dijelaskan pada Bab 2 didefinisikan sesuai dengan persamaan (2.27). Parameter distribusi GEV mengikuti persamaan model regresi berganda dengan koordinat (*latitude*) dan bujur (*longitude*) sebagai variabel penjelas. Persamaan model regresi berganda dengan variabel penjelas koordinat (*latitude*) dan bujur (*longitude*) tersebut, juga memiliki koefisien model *trend surface* yaitu β yang nilainya untuk mendapatkan parameter $\mu(x)$, $\sigma(x)$ dan $\xi(x)$. Terdapat beberapa model *trend surface*, yaitu model linier dengan mengkombinasikan komponen spasial koordinat lintang dan bujur. Model umum *trend surface* adalah sebagai berikut :

$$\mu(x) = \beta_{0,\mu} + \beta_{1,\mu} \text{lon}(x) + \beta_{2,\mu} \text{lat}(x)$$

$$\sigma(x) = \beta_{0,\sigma} + \beta_{1,\sigma} \text{lon}(x) + \beta_{2,\sigma} \text{lat}(x)$$

$$\xi(x) = \beta_{0,\xi}$$

Estimasi parameter dari model *Geometric Gaussian* dilakukan dengan MPLE dan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Memformulasikan CDF model *Geometric Gaussian*.

Fungsi distribusi kumulatif bivariat model *Geometric Gaussian* mengacu pada bentuk fungsi distribusi kumulatif bivariat model *Smith* yaitu seperti pada persamaan (4.1) berikut.

$$F(z(x_i), z(x_j)) = \exp \left\{ -\frac{1}{z(x_i)} \Phi \left(\frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \frac{z(x_j)}{z(x_i)} \right) - \frac{1}{z(x_j)} \Phi \left(\frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \frac{z(x_i)}{z(x_j)} \right) \right\} \quad (4.1)$$

dengan $z(x_i)$ dan $z(x_j)$ merupakan proses *max-stable* dengan margin Frechet pada lokasi-i dan lokasi-j. Sedangkan Φ adalah fungsi distribusi kumulatif standard Normal dan pada model *Geometric Gaussian* $(a(h))^2 = 2\sigma^2(1-\rho(h))$ maka $a(h) = \sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}$ dengan $\rho(h)$ adalah fungsi korelasi seperti pada model *Schlather* yang terdiri dari *Whittle-Matern*, *Cauchy*, *Powered Exponential* dan *Bessel*, sedangkan h adalah jarak *euclid* antara lokasi 1 dan lokasi 2. Dengan substitusi nilai $a(h) = \sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}$ ke persamaan (4.1), maka diperoleh bentuk CDF dari model *Geometric Gaussian* seperti pada persamaan (4.2) berikut:

$$F(z(x_i), z(x_j)) = \exp \left\{ -\frac{1}{z_i} \Phi \left(\frac{\sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}}{2} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}} \log \frac{z(x_j)}{z(x_i)} \right) - \frac{1}{z_j} \Phi \left(\frac{\sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}}{2} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1-\rho(h))}} \log \frac{z(x_i)}{z(x_j)} \right) \right\} \quad (4.2)$$

b. Memformulasikan PDF model *Geometric Gaussian*.

Fungsi PDF untuk model *Geometric Gaussian* diperoleh dari turunan fungsi CDF bivariat seperti pada persamaan (4.2). Terlebih dahulu dibuat pemisalan dari persamaan (4.2) sebagai berikut:

Misalkan :

$$w(h) = \frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \left(\frac{z(x_j)}{z(x_i)} \right)$$

$$v(h) = \frac{a(h)}{2} + \frac{1}{a(h)} \log \left(\frac{z(x_i)}{z(x_j)} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$ dan $j = 2, 3, \dots, m$

Maka persamaan (4.2) menjadi persamaan (4.3) sebagai berikut.

$$F(z(x_i), z(x_j)) = \exp \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \quad (4.3)$$

Selanjutnya PDF dari model *Geometric Gaussian* yang diperoleh dari turunan fungsi CDF bivariat pada persamaan (4.3) dengan uraian sebagai berikut:

Turunan fungsi CDF bivariat persamaan (4.3) terhadap z_1, z_2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z(x_i), z(x_j)) &= \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} F(z(x_i), z(x_j)) = \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(\exp \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \cdot R \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{dengan } R &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z(x_i)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \frac{\partial}{\partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Persamaan (4.4) tersebut terdiri dari 4 komponen yang dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A &= \exp \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \\ B &= \frac{\partial}{\partial z(x_i)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \\ C &= \frac{\partial}{\partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \\ D &= \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya menghitung turunan pada persamaan B, C dan D sebagai berikut:

Diketahui (Padoan, Ribatet dan Sisson, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w(h))}{\partial z(x_i)} &= -\frac{\varphi(w(h))}{a(h)z(x_i)}, & \frac{\partial \Phi(v(h))}{\partial z(x_i)} &= \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z(x_i)} \\ \frac{\partial \varphi(w(h))}{\partial z(x_i)} &= -\frac{w\varphi(w(h))}{a(h)z(x_i)}, & \frac{\partial \varphi(v(h))}{\partial z(x_i)} &= \frac{v\varphi(v(h))}{a(h)z(x_i)} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial z(x_i)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) = \frac{\partial}{\partial z(x_i)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} \right) - \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right)$$

$$= \left(\frac{\Phi(w(h))}{z^2(x_i)} + \frac{\varphi(w(h))}{a(h)z(x_i)} \cdot \frac{1}{z(x_i)} \right) - \left(\frac{\varphi(v(h))}{a(h)z(x_i)} \cdot \frac{1}{z(x_j)} \right)$$

$$= \frac{\Phi(w(h))}{z^2(x_i)} + \frac{\varphi(w(h))}{a(h)z^2(x_i)} - \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z(x_i)z(x_j)}$$

$$C = \frac{\partial}{\partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_j)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) = \frac{\partial}{\partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} \right) - \frac{\partial}{\partial z(x_j)} \left(\frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right)$$

$$= \left(\frac{\varphi(w(h))}{a(h)z(x_j)} \cdot \frac{1}{z(x_i)} \right) - \left(\frac{\Phi(v(h))}{z^2(x_j)} + \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z(x_j)} \cdot \frac{1}{z(x_j)} \right)$$

$$= \frac{\Phi(v(h))}{z^2(x_j)} + \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z^2(x_j)} - \frac{\varphi(w(h))}{a(h)z(x_i)z(x_j)}$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z(x_i) \partial z(x_j)} \left(-\frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right)$$

$$= \frac{v(h)\varphi(w(h))}{a^2(h)z^2(x_i)z(x_j)} + \frac{w(h)\varphi(v(h))}{a^2(h)z(x_i)z^2(x_j)}$$

Selanjutnya substitusi A,B,C dan D ke persamaan (4.4) maka fungsi PDF bivariat model *Geometric Gaussian* dapat disusun seperti persamaan (4.5) berikut:

$$\begin{aligned}
f(z(x_i), z(x_j)) &= A \times \{B \times C + D\} \\
f(z(x_i), z(x_j)) &= \exp \left(-\frac{\Phi(w(h))}{z(x_i)} - \frac{\Phi(v(h))}{z(x_j)} \right) \\
&\times \left\{ \left(\frac{\Phi(w(h))}{z^2(x_i)} + \frac{\varphi(w(h))}{a(h)z^2(x_i)} - \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z(x_i)z(x_j)} \right) \right. \\
&\times \left(\frac{\Phi(v(h))}{z^2(x_j)} + \frac{\varphi(v(h))}{a(h)z^2(x_j)} - \frac{\varphi(w(h))}{a(h)z(x_i)z(x_j)} \right) \\
&\left. + \left(\frac{v\varphi(w(h))}{a^2(h)z^2(x_i)z(x_j)} + \frac{w\varphi(v(h))}{a^2(h)z(x_i)z^2(x_j)} \right) \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

c. PDF model *Geometric Gaussian*

PDF bivariat model *Geometric Gaussian* pada persamaan (4.5) perlu ditransformasi terlebih dahulu ke unit marjinal Frechet, dengan fungsi inverse seperti pada persamaan (4.6) :

$$\begin{aligned}
z(x_i) &= \left(1 + \frac{\xi(x_i)(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)} \right)_+^{1/\xi(x_i)} \\
z(x_j) &= \left(1 + \frac{\xi(x_j)(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)} \right)_+^{1/\xi(x_j)} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Maka fungsi densitas bivariate menjadi :

$$f_{Y_i, Y_j}(y_i, y_j) = f(z(x_i), z(x_j)) \left[g^{-1}(y_i, y_j) \right] |J(y_i, y_j)| \quad (4.7)$$

dengan $f(z(x_i), z(x_j))$ merupakan PDF dari model *Geometric Gaussian*, dan

$$\begin{aligned}
|J(y_i, y_j)| &= \frac{1}{\sigma(x_i)\sigma(x_j)} \left(1 + \frac{\xi(x_i)(y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)} \right)_+^{1/\xi(x_i)-1} \\
&\times \left(1 + \frac{\xi(x_j)(y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)} \right)_+^{1/\xi(x_j)-1} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.5), (4.6) dan (4.8) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.7) sehingga menjadi persamaan (4.9).

$$f_{Y_i, Y_j}(y_i, y_j) = \exp(M \times (N \times O + P) \times Q) \quad (4.9)$$

dengan :

$$M = \left(- \frac{\Phi(w(h))}{\left(1 + \frac{\xi_i(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)}\right)_+^{1/\xi(x_i)}} - \frac{\Phi(v(h))}{\left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{1/\xi(x_j)}} \right)$$

$$N = \left(\frac{\Phi(w(h))}{\left(1 + \frac{\xi_i(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)}\right)_+^{2/\xi(x_i)}} + \frac{\phi(w(h))}{a \left(1 + \frac{\xi_i(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)}\right)_+^{2/\xi(x_i)}} - \frac{\phi(v(h))}{a \left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{1/\xi(x_j)}} \left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{1/\xi(x_j)} \right)$$

$$O = \left(\frac{\Phi(v(h))}{\left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{2/\xi(x_j)}} + \frac{\phi(v(h))}{a \left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{2/\xi(x_j)}} \right)$$

$$- \left(\frac{\phi(w(h))}{a \left(1 + \frac{\xi_i(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)}\right)_+^{1/\xi(x_i)}} \left(1 + \frac{\xi_j(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)}\right)_+^{1/\xi(x_j)} \right)$$

$$P = \left\{ \frac{v\phi(w(h))}{a^2(h) \left(1 + \frac{\xi(x_i)(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)} \right)_+^{2/\xi(x_i)} \left(1 + \frac{\xi(x_j)(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)} \right)_+^{1/\xi(x_j)}} + \frac{w\phi(v(h))}{a^2(h) \left(1 + \frac{\xi(x_i)(Y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)} \right)_+^{1/\xi(x_i)} \left(1 + \frac{\xi(x_j)(Y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)} \right)_+^{2/\xi(x_j)}} \right\}$$

$$Q = \left(\frac{1}{\sigma(x_i)\sigma(x_j)} \left(1 + \frac{\xi(x_i)(y_i - \mu(x_i))}{\sigma(x_i)} \right)_+^{1/\xi(x_i)-1} \times \left(1 + \frac{\xi(x_j)(y_j - \mu(x_j))}{\sigma(x_j)} \right)_+^{1/\xi(x_j)-1} \right)$$

d. Menyusun fungsi *log-pairwise likelihood*

Hasil persamaan (4.9) kemudian digunakan untuk menyusun fungsi *log-pairwise likelihood* dengan fungsi PDF yang sudah ditransformasi dengan persamaan sebagai berikut:

$$\ell_p\{\theta\} = \sum_{\ell=1}^K \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\log f_{Y_i, Y_j}(y_i, y_j) + \log |J(y_i, y_j)| \right]$$

dengan

$\ell_p = \text{log-pairwise likelihood}$

$\theta = \{\mu(x), \sigma(x), \xi(x)\}$ adalah parameter yang diestimasi

$f(\cdot, \cdot)$ = fungsi pada persamaan (4.9).

e. Memaksimumkan fungsi *pairwise likelihood*

Fungsi *pairwise likelihood* dimaksimumkan dengan cara membuat fungsi *pairwise likelihood*, dan membuat turunan pertama terhadap masing-masing parameter yang diestimasi kemudian disamakan dengan nol. Penjabaran fungsi PDF model *Geometric Gaussian* pada persamaan (4.9) menunjukkan bentuk yang sangat kompleks, sehingga turunan pertama $\ell_p\{\theta\}$ terhadap masing-masing

parameter yang diestimasi dapat dipastikan memiliki bentuk yang tidak *close form*, sehingga tidak dapat diperoleh estimasi parameter yang diinginkan. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut dibutuhkan analisis numerik. Pada tahap ini, analisis numerik yang digunakan adalah metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Bentuk parameter yang diestimasi merupakan kombinasi dari unsur spasial yaitu koordinat lintang dan bujur sehingga menghasilkan bentuk umum model *trend surface* berikut.

$$\hat{\mu}(x) = \beta_{0,\mu} + \beta_{1,\mu}lon(x) + \beta_{2,\mu}lat(x)$$

$$\hat{\sigma}(x) = \beta_{0,\sigma} + \beta_{1,\sigma}lon(x) + \beta_{2,\sigma}lat(x)$$

$$\hat{\xi}(x) = \beta_{0,\xi}$$

Model *trend surface* tersebut memiliki koefisien β yang terlebih dahulu harus diperoleh. Terdapat sebanyak 9 kombinasi model *trend surface* pada penelitian ini sehingga menghasilkan 9 model *trend surface* yang berbeda-beda, dan untuk mendapatkan model *trend surface* terbaik pada semua model *max-stable processes* dipilih berdasarkan nilai TIC yang paling kecil. Koefisien model *trend surface* selanjutnya digunakan sebagai acuan untuk mendapatkan parameter model *max-stable processes*.

4.2 Pemodelan Curah Hujan Ekstrem di Lamongan dengan Model *Geometric Gaussian*

4.2.1 Pra Pemrosesan Data Curah Hujan

Pra pemrosesan data pada setiap penelitian menjadi bagian penting sebelum penelitian dilakukan lebih lanjut. Dalam studi kasus data curah hujan, hal ini dilakukan karena dalam pencatatan data curah hujan di suatu lokasi terkadang terjadi perpindahan alat pengukur curah hujan, pergantian alat, kesalahan pencatatan oleh petugas, dan sebagainya, sehingga beberapa stasiun pencatat curah hujan seringkali memiliki data *missing* yang cukup banyak serta data yang tidak sesuai dengan tanggal pencatatan.

Missing value atau data *missing* merupakan kesalahan yang biasa ditemukan dalam data. Data mentah yang diperoleh dari BMKG yang digunakan

dalam penelitian ini juga ditemukan adanya data missing dan data yang tidak sesuai. Pengamatan yang tidak sesuai yang dimaksud adalah pengamatan yang pencatatannya dilakukan pada tanggal-tanggal yang tidak mungkin terjadi, yaitu tanggal 29 Februari pada tahun-tahun non kabisat, dan tanggal 31 pada bulan Februari, April, Juni, September, dan November. Namun penanganan pada data yang tidak sesuai sudah dilakukan dengan menghapus pengamatan. Sedangkan penanganan pada *missing value* sudah diatasi dengan dilakukan proses imputasi data menggunakan rata-rata curah hujan pada tanggal dan bulan yang sama dengan tanggal dan bulan data missing tersebut. Sehingga diperoleh data yang sudah clean dan clear pada data curah hujan Kabupaten Lamongan periode tahun 1981-2010 yaitu sebanyak 10.957 untuk dianalisis lebih lanjut.

4.2.2 Deskripsi Curah Hujan di Kabupaten Lamongan

Kabupaten Lamongan memiliki 7 stasiun pencatat curah hujan. Deskripsi curah hujan di tujuh stasiun pengamatan perlu dilakukan sebagai informasi awal untuk mengetahui karakteristik atau gambaran umum dan pola curah hujan yang digunakan. Hasil statistika deskriptif ketujuh stasiun disajikan pada Tabel 4.1 sebagai berikut:

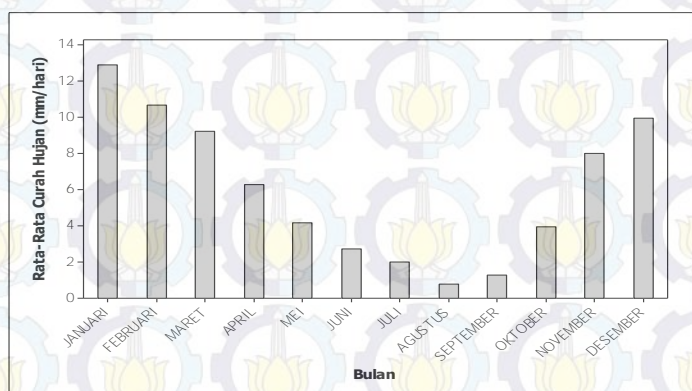
Tabel 4.1 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum dan Nilai Maksimum Curah Hujan (mm/hari)

Stasiun Pengamatan	Rata-Rata	Std Deviasi	Minimum	Maksimum
Babat	5,959	15,655	0	157
Blawi	4,553	12,302	0	200
Karangbinangun	4,164	11,393	0	164
Kedungpring	5,114	12,957	0	150
Lamongan	4,063	10,664	0	132
Pangkatrejo	4,021	10,987	0	136
Sukodadi	4,164	11,255	0	140

Tabel 4.1 menunjukkan rata-rata curah hujan di Kabupaten Lamongan mulai tahun 1981 sampai 2010 paling tinggi terjadi di Stasiun Babat yaitu sebesar 5,959 mm/hari, sedangkan rata-rata curah hujan terendah tercatat di Stasiun Pangkatrejo yaitu sebesar 4,021 mm/hari. Selain rata-rata, Tabel 4.1 juga menyajikan nilai standard deviasi curah hujan dimana pada Stasiun Babat

memiliki keragaman curah hujan yang paling tinggi yaitu sebesar 15,655 mm/hari dan Stasiun Lamongan memiliki keragaman curah hujan yang paling kecil sebesar 10,664 mm/hari. Sementara untuk nilai curah hujan minimum pada masing-masing stasiun adalah sama yaitu 0 mm/hari. Sedangkan curah hujan maksimum yang tercatat di Stasiun Babat sebesar 157 mm/hari, Blawi 200 mm/hari, Karangbinangun 164 mm/hari, Kedungpring 150 mm/hari, Lamongan 132 mm/hari, Pangkatrejo 136 mm/hari, dan Stasiun Sukodadi 140 mm/hari.

Selain statistika deskriptif, deskripsi lainnya yang dapat dilakukan pada data curah hujan adalah identifikasi pola curah hujan di tujuh stasiun yang diteliti. Sebagaimana telah dijelaskan di bab sebelumnya, bahwa terdapat tiga pola curah hujan di Indonesia yaitu pola monsun, pola equatorial, dan pola lokal. Pola curah hujan ini dapat diidentifikasi menggunakan diagram batang yang diperoleh dari nilai rata-rata curah hujan harian per bulan pada masing-masing stasiun pengamatan curah hujan. Gambar 4.1 dan 4.2 adalah diagram batang dengan data rata-rata curah hujan harian mulai bulan Januari 1981 sampai bulan Desember 2010 di stasiun pengamatan curah hujan Babat dan stasiun pengamatan lainnya yang menggambarkan pola curah hujan yang terjadi di Kabupaten Lamongan secara umum. Identifikasi pola curah hujan di stasiun pengamatan Babat dan stasiun lainnya selengkapnya disajikan pada Gambar 4.1 dan 4.2 berikut.

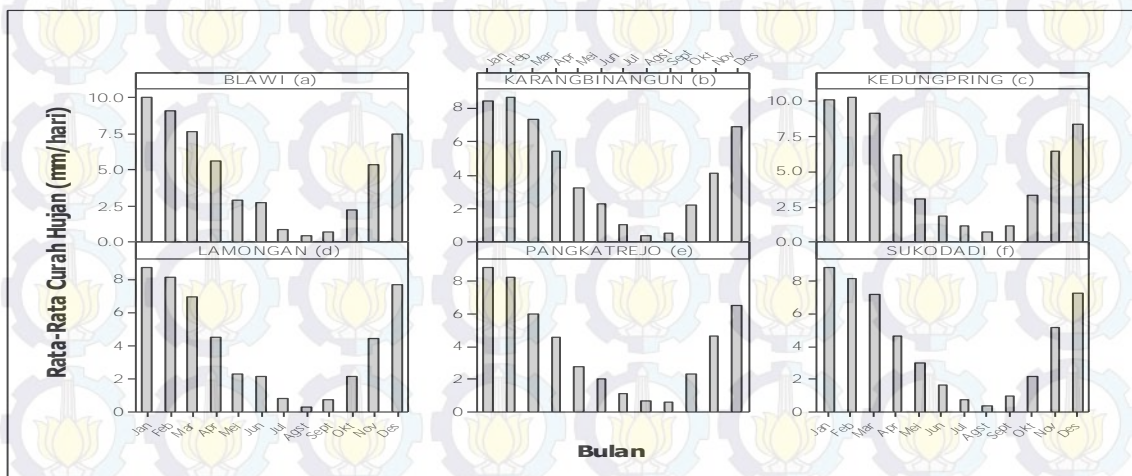


Gambar 4.1 Pola Curah Hujan Harian di Stasiun Babat

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa pola curah hujan di Stasiun Babat berpola monsun yaitu membentuk huruf U dan memiliki satu puncak musim hujan (unimodal). Puncak musim hujan terjadi pada saat jumlah curah hujan paling tinggi diantara bulan-bulan lainnya, sedangkan puncak musim kemarau terjadi

pada saat jumlah curah hujannya paling rendah diantara bulan-bulan lainnya. Pada stasiun Babat periode pengamatan tahun 1981-2010, puncak musim hujan terjadi pada bulan Januari, sedangkan puncak musim kemarau terjadi pada bulan Agustus.

Diagram batang dengan data rata-rata curah hujan harian mulai bulan Januari 1981 sampai bulan Desember 2010 di stasiun pengamatan curah hujan Blawi, Karangbinangun, Kedungpring, Lamongan, Pangkatrejo dan Sukodadi seperti disajikan pada Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.2 Pola Curah Hujan Harian di Stasiun Blawi (a), Karangbinangun (b), Kedungpring (c), Lamongan (d), Pangkatrejo (e), dan Sukodadi (f)

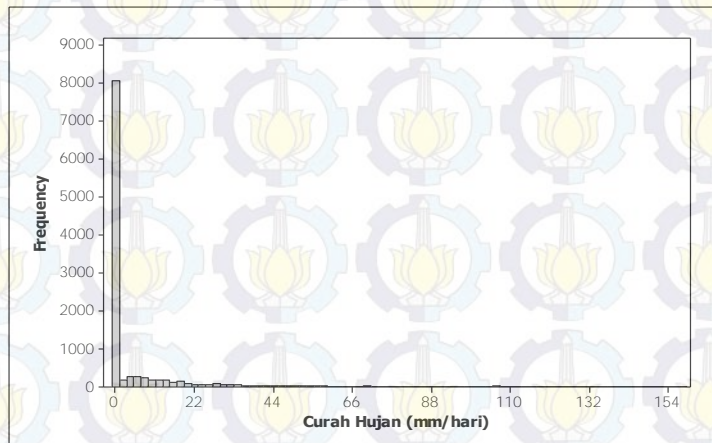
Gambar 4.2 menunjukkan bahwa pola curah hujan di Stasiun Blawi, Karangbinangun, Kedungpring, Lamongan, Pangkatrejo dan Sukodadi memiliki pola curah hujan yang sama yaitu pola monsun, dimana puncak musim hujan di enam stasiun tersebut terjadi pada sekitar bulan Januari-Februari, sedangkan puncak musim kemaraunya terjadi pada sekitar bulan Agustus dan September.

Secara umum menunjukkan pola curah hujan harian dari tahun 1981 hingga 2010 di Kabupaten Lamongan memiliki pola berbentuk U dan memiliki satu puncak curah hujan (unimodial) yang berarti bahwa tipe curah hujan di tujuh stasiun pengamatan adalah monsoon. Karakteristik dari tipe monsoon ialah perbedaan musim yang jelas, yaitu musim hujan yang terjadi pada bulan Desember-Januari-Februari (DJF), ditandai dengan tingginya curah hujan, dan

musim kemarau yang terjadi pada bulan Juni-Juli-Agustus (JJA), dengan curah hujan yang rendah.

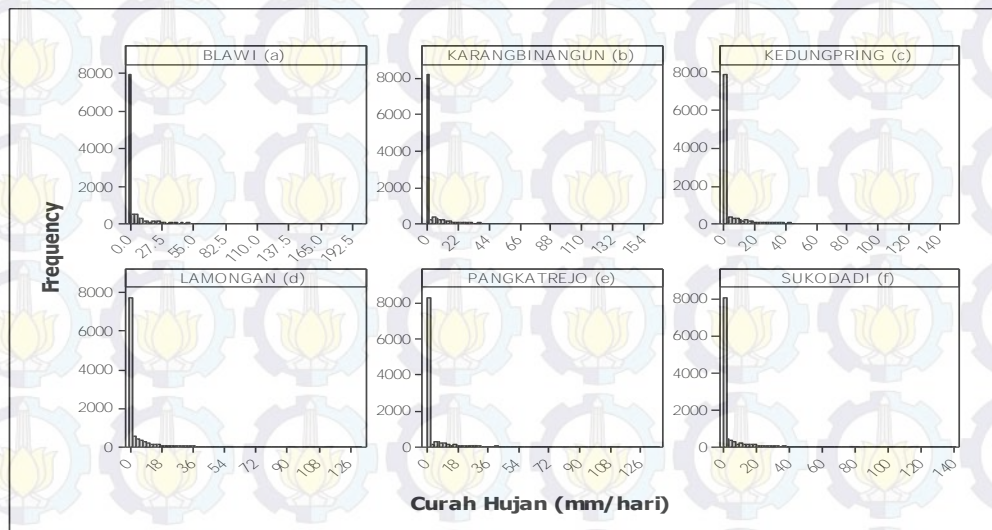
4.2.3 Identifikasi Pola Data *Heavy Tail* dan Nilai Ekstrem

Pengamatan pola data *heavy tail* diperlukan untuk mengidentifikasi data yang diduga memiliki nilai ekstrem sehingga dapat diambil kesimpulan secara statistik pendekatan bentuk distribusinya yang sesuai. Identifikasi adanya *tail* (ekor) pada data dapat diamati melalui histogram. Pola distribusi data curah hujan harian di stasiun Babat yang menunjukkan adanya *tail* (ekor) ditunjukkan dalam histogram seperti Gambar 4.3 berikut.



Gambar 4.3 Histogram Curah Hujan di Stasiun Babat

Histogram pada Gambar 4.3 mengindikasikan bahwa curah hujan di Stasiun Babat memiliki pola data *heavy tail* dimana terlihat ekor distribusinya turun secara lambat. Pola data *heavy tail* ini juga menunjukkan bahwa data curah hujan mengandung nilai-nilai ekstrem. Histogram untuk keenam stasiun pengamatan yang lain selengkapnya ditampilkan pada Gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.4 Histogram Curah Hujan di Stasiun Blawi (a), Karangbinangun (b), Kedungpring (c), Lamongan (d), Pangkatrejo (e), dan Sukodadi (f)

Gambar 4.4 menunjukkan pola yang sama juga terlihat pada data curah hujan di enam stasiun tersebut. Histogram tersebut menunjukkan bahwa data curah hujan harian di Stasiun Blawi, Karangbinangun, Kedungpring, Lamongan, Pangkatrejo, dan Sukodadi memiliki ekor distribusi yang juga turun secara lambat sehingga mengindikasikan adanya pola data *heavy tail*. Berdasarkan histogram di semua stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan yang menunjukkan adanya *tail* (ekor), maka secara statistik data curah hujan harian periode tahun 1981-2010 di Kabupaten Lamongan memiliki nilai ekstrem

4.2.4 Pengambilan Sampel Ekstrem dengan *Block Maxima*

Data curah hujan di Kabupaten Lamongan berdasarkan pembahasan sebelumnya menunjukkan mengandung nilai ekstrem dan tidak berdistribusi normal. Dengan demikian langkah selanjutnya adalah melakukan pengambilan sampel ekstrem pada data curah hujan di Kabupaten Lamongan periode tahun 1981-2010. Salah satu metode pengambilan sampel ekstrem adalah berdasarkan EVT adalah *block maxima*. Pengambilan sampel dengan metode *block maxima* dilakukan dengan membagi data ke dalam blok-blok. Pembagian blok pada penelitian ini adalah berdasarkan pembagian blok yang digunakan pada penelitian terdahulu oleh Anindita Reza (2015), Malika Rosna (2015) dan Ramadani Ikha

(2015). Selain itu pembagian blok juga berdasarkan pembagian pola musim hujan oleh BMKG. Data curah hujan dibagi dalam blok, dalam satu tahun dibagi empat blok yaitu periode tiga bulanan Desember Januari Februari (DJF), Maret April Mei (MAM), Juni Juli Agustus (JJA) dan September Oktober Nopember (SON). Pola curah hujan di tujuh stasiun pengamatan di Kabupaten Lamongan adalah berpola monsun. Pada pola monsun, pembagian periode musimnya meliputi DJF yang merupakan periode musim hujan, MAM merupakan periode transisi dari musim hujan ke musim kemarau, JJA merupakan periode musim kemarau, dan SON merupakan periode transisi dari musim kemarau ke musim hujan.

Data yang digunakan adalah data curah hujan di Kabupaten Lamongan mulai bulan Januari 1981 sampai bulan Desember 2010, sehingga terdapat sebanyak 30 tahun data dimana satu tahun dibagi dalam 4 blok. Blok pertama diawali dari bulan Maret April Mei (MAM) tahun 1981 dan diakhiri blok bulan September Oktober November (SON) tahun 2010, sehingga diperoleh sebanyak 119 blok. Setelah dilakukan pembagian data ke dalam blok, kemudian dilakukan pengambilan sampel ekstrem berdasarkan curah hujan maksimum setiap bloknya. Banyaknya data ekstrem yang diperoleh dengan blok 3 bulanan adalah 119 sampel pada masing-masing stasiun pengamatan curah hujan. Data selengkapnya disajikan pada Lampiran B.

4.2.5 Deskripsi Sampel Ekstrem

Sampel ekstrem yang diperoleh dari metode *block maxima* pada bagian 4.2.4 selanjutnya dianalisis lebih lanjut. Sampel sebanyak 119 pengamatan terlebih dahulu dianalisis secara deskriptif, untuk selanjutnya ditemukan pendekatan distribusinya yang sesuai secara statistik. Berdasarkan EVT, sampel data ekstrem dapat didekati sebagai distribusi GEV. Dengan demikian dilakukan uji kecocokan distribusi GEV pada sampel ekstrem curah hujan yang salah satu caranya menggunakan uji Kolmogorov Smirnov (KS) satu sampel.

Langkah analisis awal adalah deskriptif sampel ekstrem sebanyak 119 yang disajikan dalam Tabel 4.2 berikut.

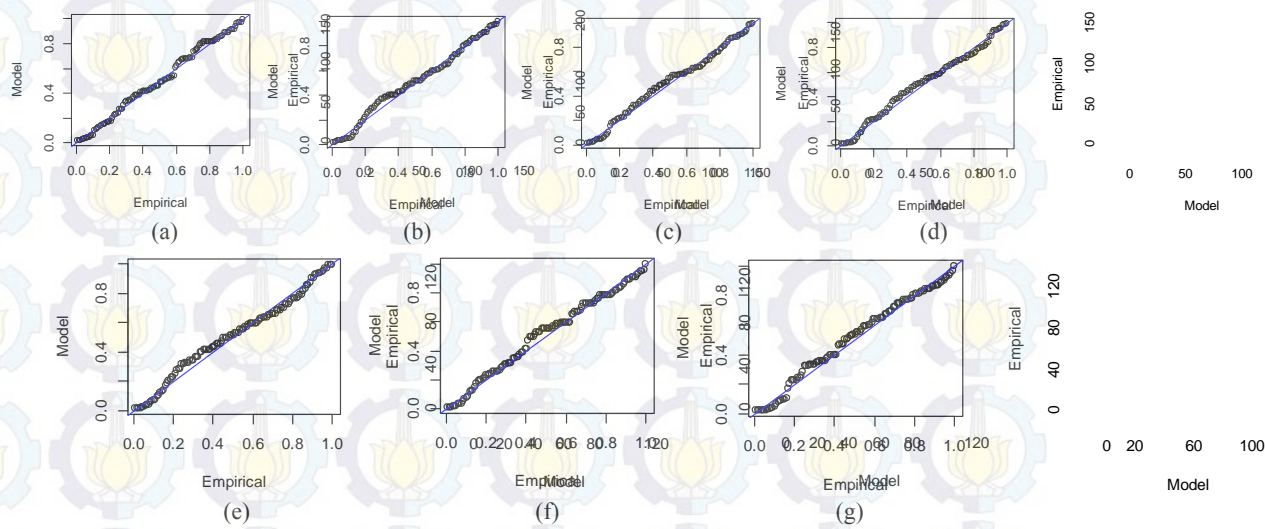
Tabel 4.2 Nilai Rata-Rata, Standard Deviasi, Nilai Minimum dan Nilai Maksimum Sampel Ekstrem (mm/hari)

Stasiun Pengamatan	Rata-Rata	Std.Deviasi	Minimum	Maksimum
Babat	71,88	34,96	0	157
Blawi	62,24	35,66	0	200
Karangbinangun	58,85	30,59	0	164
Kedungpring	62,95	31,77	0	150
Lamongan	52,87	27,44	0	132
Pangkatrejo	58,27	26,30	0	136
Sukodadi	56,23	28,89	0	140

Tabel 4.2 menunjukkan rata-rata sampel ekstrem curah hujan di Kabupaten Lamongan mulai tahun 1981 sampai 2010 hasil metode *block maxima* yang berjumlah 119, paling tinggi terjadi di Stasiun Babat yaitu sebesar 71,88 mm/hari, sedangkan rata-rata curah hujan terendah terjadi di Stasiun Lamongan yaitu sebesar 52,87 mm/hari. Selain rata-rata, Tabel 4.2 juga menyajikan nilai standard deviasi curah hujan dimana pada Stasiun Blawi memiliki keragaman curah hujan yang paling tinggi yaitu sebesar 35,66 mm/hari dan Stasiun Pangkatrejo memiliki keragaman curah hujan yang paling kecil sebesar 26,30 mm/hari. Sementara untuk nilai curah hujan minimum pada masing-masing stasiun adalah sama yaitu 0 mm/hari. Sedangkan curah hujan maksimum yang terjadi Stasiun Babat sebesar 157 mm/hari, Blawi 200 mm/hari, Karangbinangun 164 mm/hari, Kedungpring 150 mm/hari, Lamongan 132 mm/hari, Pangkatrejo 136 mm/hari, dan Stasiun Sukodadi 140 mm/hari.

4.2.6 Identifikasi Distribusi GEV

Berdasarkan EVT pengambilan sampel ekstrem yang diperoleh dengan metode *block maxima* mengikuti distribusi GEV. Identifikasi distribusi GEV dilakukan dengan 2 cara yaitu melalui identifikasi *Probability plot* dan uji *Kolmogorov Smirnov* (KS) satu sampel. *Probability plot* masing-masing stasiun disajikan pada Gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.5 Probability Plot di Stasiun Babat (a), Blawi (b), Karangbinangun (c), Kedungpring (d), Lamongan (e), Pangkatrejo (f), dan Sukodadi (g)

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa pada ketujuh plot, hampir semua titik sebaran mengikuti garis linear. Hal ini berarti sampel ekstrem curah hujan periode blok 3 bulanan di semua stasiun pengamatan di Kabupaten Lamongan mengikuti distribusi GEV.

Salah satu uji statistik yang sering digunakan untuk uji distribusi adalah uji KS satu sampel seperti sudah dibahas di Bab 2. Pada taraf signifikansi sebesar α apabila diperoleh $p\text{-value} > \alpha$ maka gagal tolak H_0 , sehingga benar secara statistik bahwa data pada penelitian ini berdistribusi yang diduga. Nilai D_{hitung} dan D_α pada masing-masing lokasi disajikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Uji Kolmogorov-Smirnov GEV Periode Blok 3 Bulanan

Lokasi	p-value	α	Kesimpulan
Babat	0.6552	0,05	Gagal Tolak H_0
Blawi	0.9228	0,05	Gagal Tolak H_0
Karangbinangun	0.9846	0,05	Gagal Tolak H_0
Kedungrejo	0.9993	0,05	Gagal Tolak H_0
Lamongan	0.9846	0,05	Gagal Tolak H_0
Pangkatrejo	0.8048	0,05	Gagal Tolak H_0
Sukodadi	0.8048	0,05	Gagal Tolak H_0

Tabel 4.3 menunjukkan hasil pengujian kesesuaian distribusi sampel ekstrem dengan metode block maxima periode blok 3 bulanan mengikuti

distribusi GEV. Hal tersebut dapat dilihat dari nilai p-value $> \alpha$ dengan $\alpha = 5\%$ sehingga menghasilkan keputusan terbukti benar secara statistik bahwa sampel ekstrem berdistribusi yang diduga yaitu GEV.

4.2.7 Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan *Maximum Likelihood Estimation*

Sampel ekstrem yang diperoleh dan terbukti secara statistik berdistribusi GEV, selanjutnya dapat diestimasi parameter-parameternya. Secara umum distribusi GEV memiliki PDF seperti pada persamaan (2.2) dan salah satu metode untuk estimasi parameter-parameternya adalah dengan MLE. Hasil estimasi parameter GEV disajikan pada Tabel 4.4 sebagai berikut.

Tabel 4.4 Estimasi Parameter GEV Periode Blok 3 Bulanan

Stasiun Pengamatan	Latitude	Longitude	Parameter lokasi ($\hat{\mu}$)	Parameter skala ($\hat{\sigma}$)	Parameter bentuk ($\hat{\xi}$)
Babat	-7,110	112,170	60,265	35,459	-0,322
Blawi	-7,050	112,450	47,240	31,536	-0,109
Karangbinangun	-7,020	112,510	46,533	28,531	-0,162
Kedungpring	-7,200	112,210	51,363	31,456	-0,254
Lamongan	-7,120	112,430	42,086	25,845	-0,183
Pangkatrejo	-7,010	112,280	48,705	26,753	-0,268
Sukodadi	-7,100	112,320	45,787	29,371	-0,274

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa pada sampel ekstrem sebanyak 119 pengamatan, hasil estimasi parameter-parameternya menunjukkan distribusi data curah hujan ekstrem di tujuh stasiun pengamatan curah hujan Kabupaten Lamongan adalah berdistribusi Weibull dikarenakan parameter bentuk bernilai negatif ($\hat{\xi} < 0$) sebagaimana telah duraikan di Bab 2.

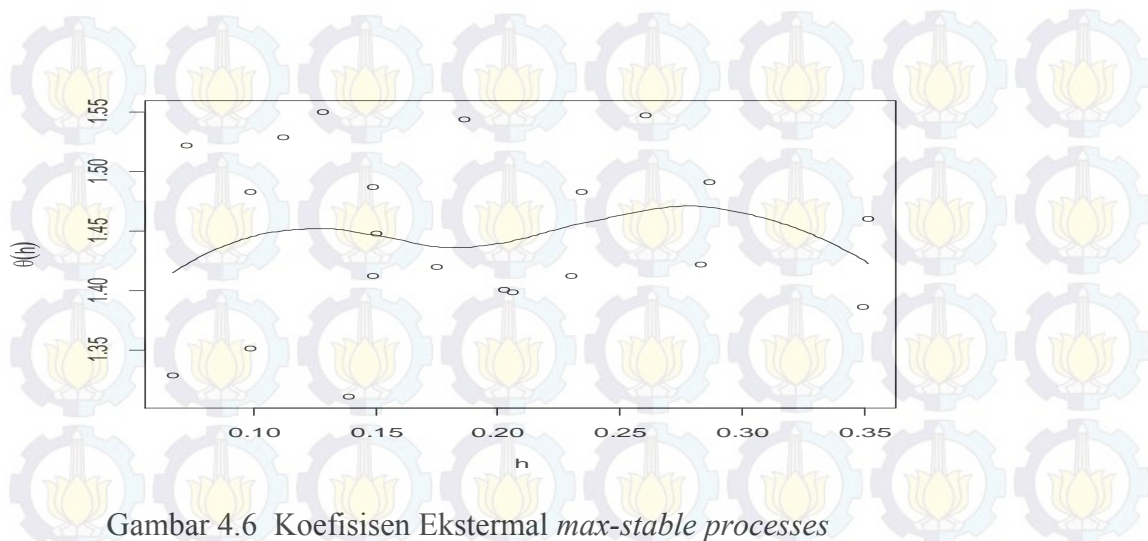
4.2.8 Identifikasi Dependensi Spasial pada Sampel Curah Hujan Ekstrem

Max-stable processes pada dasarnya merupakan salah satu proses dalam Spatial Extrem Value Theory (SEVT) dengan salah satu tujuannya untuk memperoleh prediksi *return level* suatu data. Sebagaimana sudah dibahas pada Bab 2 proses yang dimaksud adalah melakukan transformasi distribusi GEV yang

diperoleh dari 4.2.7 ke distribusi marginal GEV yaitu distribusi Frechet dengan menambahkan *varying surfaces*. Model *trend surfaces* yang terbentuk bergantung pada variabel penjelas seperti, lokasi (lintang dan bujur), ketinggian atau jarak, dan unsur cuaca/iklim. (Padoan, Ribatet dan Sisson, 2010). Dengan demikian masing-masing parameter distribusi GEV yaitu μ, σ, ξ berubah menjadi parameter dari distribusi spasial GEV yaitu $\mu(x), \xi(x), \sigma(x)$ untuk setiap $x \in X$ sebagai aspek spasial yang diikutkan. Pada perkembangannya, *max-stable processes* terdiri atas beberapa model diantaranya adalah model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* yang akan dibahas lebih lanjut pada bab ini.

Pada penelitian ini variabel penjelas sebagai unsur spasial yang digunakan adalah lokasi (lintang dan bujur). Pada kasus spasial ekstrem, salah satu analisis awal yang dilakukan adalah mengetahui adanya dependensi spasial. Identifikasi dependensi spasial ini menjadi langkah awal *max-stable processes* yang menggunakan ukuran dengan koefisien eksternal. Koefisien eksternal menggambarkan dependensi spasial ekstrem secara parsial atau bivariat (dua lokasi berpasangan). Dalam perhitungannya, diperlukan informasi mengenai jarak antar stasiun pengamatan curah hujan yang dihitung menggunakan konsep jarak *Euclid*.

Terdapat sebanyak tujuh stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan yang diteliti, dan berdasarkan hasil perhitungan jarak antar dua stasiun, tidak ada pasangan stasiun yang mempunyai jarak yang sama, sehingga terdapat 21 pasang lokasi yang perlu diestimasi nilai koefisien eksternalnya. Nilai koefisien eksternal yang diperoleh kemudian diplotkan terhadap jarak h . Sebagaimana sudah diuraikan pada Bab 2 bahwa koefisien eksternal bernilai 1 menunjukkan adanya dependensi penuh, sedangkan koefisien eksternal bernilai 2 menunjukkan tidak terindikasi dependensi spasial (independen penuh). Koefisien eksternal yang diperoleh disajikan dalam Gambar 4.6 sebagai berikut:



Gambar 4.6 Koefisien Eksternal *max-stable processes*

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa sebagian besar nilai koefisien eksternal berada pada interval $[1,2]$, yang menunjukkan masih terdapat indikasi dependen antar lokasi pengamatan. Dengan demikian, plot koefisien eksternal menunjukkan adanya unsur spasial antar lokasi stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan.

4.2.9 Penaksiran Model *Geometric Gaussian*

Model *Geometric Gaussian* mempunyai 4 koefisien korelasi sama seperti pada model Schlather yaitu *Whittle-Matern*, *Cauchy*, *Powered exponential*, dan *Bessel*. Fungsi korelasi yang digunakan dalam penelitian ini merupakan fungsi korelasi untuk data spasial yang didasarkan pada pengukuran jarak. Keempat fungsi korelasi tersebut dipilih yang terbaik berdasarkan nilai TIC terkecil. Tabel 4.5 menampilkan rangkuman 4 model *Geometric Gaussian* dan *Schlather* dengan fungsi korelasi yang berbeda yaitu pada model *Schlather* tipe *Cauchy* menghasilkan nilai *nugget* 0,0006, *range* sebesar 0,032 dan *smooth* sebesar 0,548. Sedangkan pada model *geometric Gaussian* menghasilkan nilai *nugget* 0,00015, *range* sebesar 0,0125 dan *smooth* sebesar 0,0452. Nilai-nilai *nugget*, *range* dan *smooth* tersebut adalah nilai fungsi korelasi pada model *Geometric Gaussian* dan *Schlather* yang terpilih yaitu *Cauchy*. karena memiliki TIC terkecil. TIC fungsi korelasi *Cauchy* pada model *Schlather* adalah 20.918,43 dan TIC fungsi korelasi *Cauchy* pada model *Geometric Gaussian* sebesar 21.044,17.

Tabel 4.5. Estimasi Parameter Dependensi Model *Geometric Gaussian* dan *Schlather*

Fungsi Korelasi	σ^2	<i>Nugget</i> <i>Schlather</i>	<i>Range</i>	<i>Smooth</i>	TIC
<i>Whittle-Matern</i>	-	0,814	5166,507	5,957	NA
<i>Cauchy</i>	-	0,0006	0,032	0,548	20918.430*
<i>Powered exponential</i>	-	0,724	44,250	0,173	20924.510
<i>Bessel</i>	-	0,686	0,096	0,826	20921.190
<i>Geometric Gaussian</i>					
<i>Whittle-Matern</i>	4775	0,00005	1645	0,152	21045.860
<i>Cauchy</i>	11,12	0,00015	0,0125	0,0452	21044.170*
<i>Powered exponential</i>	9056	0,00002	6079	0,343	21045.780
<i>Bessel</i>	9,846	0.2161	0.3767	2.3508	NA

Ket : *) Nilai TIC terkecil

NA menunjukkan nilai TIC tidak dapat dihitung karena pada model Whittle-Matern matriksnya singular. sehingga nilai TIC tidak bisa dihitung

Sebagaimana telah diuraikan sebelumnya bahwa *max-stable processes* merupakan proses transformasi distribusi GEV ke distribusi Frechet dengan menambahkan unsur spasial yaitu lokasi (lintang dan bujur). Distribusi hasil transformasi tersebut selanjutnya disebut distribusi spasial GEV yaitu gabungan spasial dan distribusi GEV.

Model spasial GEV didefinisikan oleh persamaan (2.25), dan unsur spasial yang digunakan yaitu lokasi (lintang dan bujur) telah diuraikan sebelumnya melalui koefisien eksternal, terbukti memberikan pengaruh terhadap data curah hujan. Sehingga parameter-parameter pada distribusi GEV yang semula adalah μ, σ, ξ berubah menjadi $\mu(x), \sigma(x), \xi(x)$ sebagai parameter-parameter pada distribusi spasial GEV dengan x merupakan unsur spasial yaitu lokasi.

Untuk memodelkan dependensi spasial, terdapat beberapa model *trend surface*, yaitu model linier dengan mengombinasikan komponen spasial koordinat lintang dan bujur. Model umum *trend surface* adalah sebagai berikut :

$$\mu(x) = \beta_{0,\mu} + \beta_{1,\mu}lon(x) + \beta_{2,\mu}lat(x)$$

$$\sigma(x) = \beta_{0,\sigma} + \beta_{1,\sigma}lon(x) + \beta_{2,\sigma}lat(x)$$

$$\xi(x) = \beta_{0,\xi}$$

Menurut Ribatet (2013), parameter bentuk (*shape*) $\xi(x)$ cenderung terlalu kompleks karena parameter ini memiliki ketidakpastian (*uncertainties*) yang cukup besar sehingga diasumsikan konstan. Hal utama yang diperhatikan dalam estimasi parameter *max-stable processes* adalah adanya fungsi distribusi dengan dimensi terbatas (*finite dimension*) sehingga estimasi akan sulit untuk dilakukan untuk data spasial. Metode *full likelihood* dalam perhitungannya memerlukan fungsi densitas gabungan. Namun pada *max-stable processes*, tidak didapatkan fungsi densitas gabungan karena jumlah variabel lokasi yang besar. Karena itu, digunakan metode *Pairwise Likelihood* dimana hanya fungsi densitas *pairwise* yang diperlukan.

Distribusi GEV dalam konteks model spasial didefinisikan sebagai berikut: $GEV(\mu(x), \sigma(x), \xi(x))$ dimana parameter spasial GEV mengikuti persamaan model umum *trend surface* dimana Longitude dan *latitude* merupakan variabel geografis yang menunjukkan koordinat letak suatu lokasi, dalam hal ini berfungsi sebagai variabel penjelas seperti yang terdapat pada model-model regresi pada umumnya. Pada penelitian ini, model parameter $\mu(x), \sigma(x), \xi(x)$ yang digunakan adalah semua kemungkinan model dengan kombinasi variabel longitude dan latitude.

Digunakan sebanyak 9 alternatif kombinasi model seperti pada Tabel 3.2 yang menghasilkan 9 *trend surface* untuk parameter $\mu(x)$ dan $\sigma(x)$ sedangkan parameter $\xi(x)$ diasumsikan bernilai konstan. Hal ini karena asumsi isotropik yang berarti bahwa curah hujan pada tiap lokasi adalah homogen dimana telah dibahas sebelumnya bahwa curah hujan di Lamongan memiliki pola yang sama demikian pula ekor distribusinya juga sama turun secara lambat.

Hasil estimasi parameter dari 9 *trend surface* sesuai Tabel 3.2 dan nilai TIC pada masing-masing *trend surface* disajikan dalam Tabel 4.6 berikut.

Tabel 4.6 Estimasi Parameter 9 Kombinasi Model *Trend Surface*

Kombinasi	$\hat{\beta}_{0,\mu}$	$\hat{\beta}_{1,\mu}$	$\hat{\beta}_{2,\mu}$	$\hat{\beta}_{0,\sigma}$	$\hat{\beta}_{1,\sigma}$	$\hat{\beta}_{2,\sigma}$	$\hat{\xi}$	TIC
MTS 1	1,011	0,002	0,004	1,007	0,003	0,007	0,975	3580,691
MTS 2	1,010	-	0,004	1,006	-	0,008	0,975	3577,763
MTS 3	1,010	0,004	-	1,006	0,005	0,003	0,975	3579,598
MTS 4	1,010	0,006	-0,002	1,006	0,008	-	0,975	3579,113
MTS 5	1,010	0,004	-	1,006	0,006	-	0,976	3578,002
MTS 6	1,012	-	0,005	1,008	0,0006	0,009	0,975	3579,425
MTS 7	1,010	-0,0003	0,005	1,005	-	0,008	0,975	3578,743
MTS 8	1,011	0,0002	-	1,008	-	0,003	0,976	3577,717*
MTS 9	1,010	-	-0,001	1,006	0,002	-	0,975	3577,977

Ket : *) Nilai TIC terkecil

MTS = Model Trend Surface

Tabel 4.6 menunjukkan model *trend surface* terbaik adalah kombinasi model *trend surface* 8 dengan menggunakan komponen spasial garis lintang dan garis bujur. Pemilihan model *trend surface* ke-8 sebagai model terbaik yang terpilih, karena berdasarkan nilai TIC trend surface 8 adalah paling kecil dibandingkan trend surface yang lain yaitu sebesar 3577,7170. Parameter distribusi spasial GEV terbaik berdasarkan trend surface 8 yang diperoleh selengkapnya dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\mu}(x) = 1.0111695 + 0.0001892 \text{lon}(x)$$

$$\hat{\sigma}(x) = 1.00774 + 0.00335 \text{lat}(x)$$

$$\hat{\xi}(x) = 0.976$$

Setelah didapatkan model spasial GEV terbaik yaitu *trend surface* 8, langkah selanjutnya adalah menaksir parameter model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* yang masing-masing menggunakan model fungsi korelasi yang berbeda-beda. Ribatet (2009) menjelaskan dalam *guide packages SpatialExtremes* Program R, untuk model *Smith* menggunakan *cov.mod*

"gauss", model *Brown-Resnick* menggunakan *cov.mod* "brown", model *Schlather* menggunakan *cov.mod* dari salah satu fungsi korelasi terbaik *Whittle-Matern*, *Cauchy*, *Powered exponential*, dan *Bessel* dengan penulisan notasi sebagai berikut: "Whitmat", "Cauchy", "powexp", "bessel" dan untuk model *Geometric Gaussian* sama halnya pada model *Schlather* dengan pemilihan fungsi korelasi terbaik dengan penulisan notasi sebagai berikut: "gWhitmat", "gCauchy", "gpowexp", "gbessel".

Tabel 4.5 menunjukkan bahwa koefisien korelasi terbaik yang terpilih untuk model *Schlather* adalah *Cauchy* dengan TIC sebesar 20918,43 dan untuk model *Geometric Gaussian* juga diperoleh koefisien korelasi terbaik adalah *Cauchy* dengan TIC sebesar 21044,17. Selain itu packages *SpatialExtremes* juga menunjukkan *cov.mod* "gauss" model *Smith* menghasilkan nilai $cov11=0.01441$, $cov12=0.02936$ dan $cov22=0.05981$. Pada model *Brown-Resnick* dengan notasi *cov.mod* "brown" yang dihasilkan adalah $range=0,02492$ dan $smooth=0,0000001023$.

Langkah analisis selanjutnya dari *max-stable processes* adalah dengan menggunakan hasil spasial GEV terpilih dan koefisien korelasi masing-masing model *max-stable*, maka diperoleh parameter model *max-stable*. Tabel 4.7 berikut disajikan hasil parameter-parameter dari 4 model *max-stable processes* dimana parameter *shape* bernilai konstan untuk semua lokasi pada satu model tertentu. Hal ini karena asumsi isotropik yang berarti bahwa curah hujan pada tiap lokasi adalah homogen tanpa memperhitungkan unsur lain, misalnya kecepatan angin atau ketinggian. Pada stasiun Babat Tabel 4.7 menunjukkan estimasi parameter dengan model *Geometric Gaussian* adalah untuk *location* sebesar 53.278, *scale* sebesar 30.009 dan *shape* sebesar (-0.103). Parameter *max-stable* tersebut selanjutnya digunakan dalam perhitungan *return level* curah hujan di masing-masing lokasi pengamatan Kabupaten Lamongan. Estimasi Parameter model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* selengkapnya disajikan pada Tabel 4.7 berikut.

Tabel 4.7 Estimasi Parameter model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*

Lokasi	<i>Smith</i>			<i>Schlather</i>			<i>Brown Resnick</i>			<i>Geometric Gaussian</i>		
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$
Babat	53.341	30.021	-0.126	54.110	30.236	-0.146	53.114	30.010	-0.105	53.278	30.009	-0.103
Blawi	43.817	30.585	-0.126	44.594	30.800	-0.146	43.594	30.637	-0.105	43.536	30.272	-0.103
Karang- binangun	41.776	30.867	-0.126	42.555	31.083	-0.146	41.554	30.951	-0.105	41.449	30.403	-0.103
Kedung- pring	51.981	29.175	-0.126	52.751	29.390	-0.146	51.754	29.068	-0.105	51.887	29.614	-0.103
Lamongan	44.497	29.927	-0.126	45.274	30.142	-0.146	44.274	29.905	-0.105	44.232	29.965	-0.103
Pangkatrejo	49.599	30.961	-0.126	50.372	31.177	-0.146	49.374	31.055	-0.105	49.451	30.447	-0.103
Sukodadi	48.239	30.115	-0.126	49.012	30.330	-0.146	48.014	30.114	-0.105	48.059	30.052	-0.103

4.2.8 Perhitungan *Return Level*

Tujuan akhir dari penelitian ini adalah mendapatkan *return level* curah hujan di masing-masing stasiun pengamatan Kabupaten Lamongan berdasarkan proses *max-stable*. Data yang sudah dianalisis untuk mendapatkan prediksi *return level* adalah data curah hujan di Kabupaten Lamongan periode 1981-2010, dan hasil *return level* akan divalidasi dengan data aktual yaitu data curah hujan periode tahun 2011-2012. Pada pembahasan sebelumnya sudah dilakukan analisis data curah hujan hingga sampai ditemukan parameter *max-stable* dalam bentuk 4 model. Berdasarkan hasil tersebut, dilakukan perhitungan *return level* berdasarkan masing masing model.

Pada penelitian pembagian blok berdasarkan pembagian zona musim oleh BMKG yaitu satu tahun dibagi dalam 4 blok, sehingga untuk periode ulang 2 tahun nilai $T = 2 \text{ tahun} \times 4 \text{ blok} = 8$. Demikian pula perhitungan dengan cara yang sama untuk periode ulang yang diinginkan. Berikut ini diambil salah satu contoh perhitungan manual *return level* pada pos Babat untuk tahun 2012 dengan model *Geometric Gaussian*.

$$z_p(s) = \hat{\mu}(s) - \frac{\hat{\sigma}(s)}{\hat{\xi}(s)} \left(1 - \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right) \right]^{-\hat{\xi}(s)} \right).$$

Diketahui $T = 2 \text{ tahun} \times 4 \text{ blok periode} = 8$, dan estimasi parameter *location*, *scale*, dan *shape* mengacu pada Tabel 4.7 sehingga

$$\begin{aligned} z_p(\text{Babat}) &= 53.278 - \frac{30.009}{-0.103} \left(1 - \left[-\ln\left(1 - \frac{1}{8}\right) \right]^{0.103} \right) \\ &= 107.829 \approx 107.83 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan *return level* selengkapnya disajikan pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8 Perhitungan *Return Level* pada periode ulang 2 tahun (mm/hari)

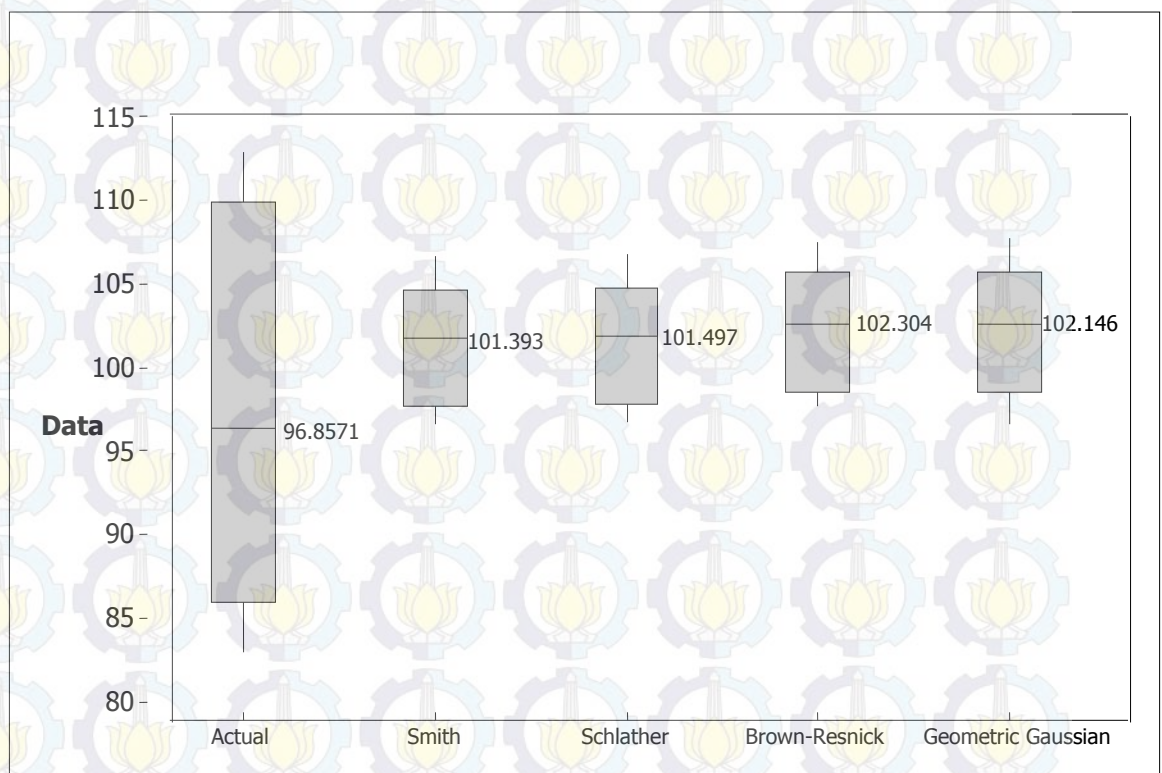
Lokasi	Actual (2011- 2012)	<i>Smith</i>	<i>Schlather</i>	<i>Brown- Resnick</i>	<i>Geometric Gaussian</i>
Babat	94	106.75	106.85	107.60	107.83
Blawi	113	98.22	98.32	99.22	98.57
Karangbinangun	86	96.68	96.77	97.75	96.72
Kedungpring	83	103.88	104.02	104.53	105.72
Lamongan	92	97.73	97.85	98.57	98.70
Pangkatrejo	110	104.68	104.75	105.76	104.80
Sukodadi	100	101.81	101.92	102.69	102.69
RMSE		11.93	11.98	12.22	12.59

Tabel 4.8 menunjukkan *return level* melalui keempat model *max-stable*. Pada tahun 2012 diperkirakan curah hujan terbesar yang turun yaitu sebesar 106.75 mm/hari yaitu pada stasiun Babat dengan model *Smith*. Sedangkan dugaan curah hujan terbesar tahun 2012 dengan model *Schlather* adalah sebesar 106.85 mm/hari di pos yang sama. Demikian pula dugaan curah hujan terbesar tahun 2012 dengan model *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian* adalah sebesar 107.60 mm/hari dan 107.83 mm/hari tetap terjadi pada stasiun yang sama yaitu Babat. Terlihat perbedaan nilai *return level* di stasiun pengamatan Babat yang dihasilkan oleh model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *Geometric Gaussian*, dimana model *Geometric Gaussian* memiliki nilai yang paling besar. Namun demikian tidak terjadi pada stasiun-stasiun yang lain. Seperti prediksi tahun 2012 di stasiun Blawi, dugaan curah hujan ekstrem terbesar menggunakan model *Brown-Resnick* yaitu sebesar 99.22 mm/hari. Stasiun Karangbinangun dugaan curah hujan ekstrem terbesar masih tetap yang menggunakan model *Brown-Resnick* yaitu sebesar 97.75. Stasiun Kedungpring dugaan curah hujan ekstrem terbesar adalah yang menggunakan model *Geometric Gaussian* yaitu sebesar 105.72 mm/hari. Stasiun Lamongan dugaan curah hujan ekstrem terbesar masih tetap yang menggunakan model *Geometric Gaussian* yaitu sebesar 98.70 mm/hari. Stasiun Pangkatrejo dugaan curah hujan ekstrem terbesar adalah yang menggunakan model *Brown-Resnick* yaitu sebesar 105.76 mm/hari. Stasiun

Sukodadi dugaan curah hujan ekstrem terbesar adalah yang menggunakan model *Brown-Resnick* yaitu sebesar 102.69 mm/hari.

Tabel 4.8 menunjukkan untuk prediksi curah hujan ekstrem tahun 2012, model *Smith* dan *Schlather* tidak pernah menghasilkan nilai tertinggi diantara keempat model untuk semua stasiun pengamatan. Untuk melihat seberapa baik model ini bekerja, dilakukan perbandingan return level dugaan dengan nilai aktual yang diperoleh dari nilai curah hujan paling tinggi di masing-masing stasiun pengamatan Kabupaten Lamongan periode tahun 2011-2012.. Ukuran kebaikan model menggunakan kriteria RMSE, yaitu dengan mengukur simpangan atau selisih antara nilai aktual dengan dugaannya, model yang baik ditunjukkan melalui nilai RMSE yang kecil. Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa RMSE *return level* periode tahun 2012 paling kecil adalah yang menggunakan model *Smith* yaitu sebesar 11.93. Dengan kata lain model *Smith* terpilih menjadi model *max-stable* terbaik untuk prediksi *return level* studi kasus curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan periode tahun 1981-2012.

Selain dilakukan perhitungan nilai RMSE yang menghasilkan nilai terkecil pada model *Smith*, analisis juga dapat dilakukan terhadap data *return level* periode ulang 2 tahun (2012) dengan cara diplotkan dengan nilai actual (2011-2012) dalam boxplot seperti pada Gambar 4.7. Gambar 4.7 menunjukkan bahwa keempat model *max-stable processes* menghasilkan nilai rata-rata *return level* yang hampir sama. Nilai-nilai prediksi tersebut masih berada dalam range box nilai actual. Dengan demikian meskipun secara perhitungan RMSE model *Smith* adalah yang terbaik namun dari Boxplot menggambarkan kebaikan keempat model adalah hampir sama atau seimbang. Rata-rata curah hujan pada periode tahun 2011-2012 yang menjadi data actual adalah sebesar 96,8571 mm/hari, sedangkan prediksi *return level* curah hujan ekstrem yang turun pada tahun 2012 dengan model *Smith* adalah sebesar 101,393 mm/hari, model *Schlather* memprediksi sebesar 101,497 mm/hari, model *Brown-Resnick* memprediksi *return level* sebesar 102,304 mm/hari, dan model terakhir yaitu *geometric gaussian* memberikan prediksi *return level* curah hujan ekstrem yang turun di Kabupaten Lamongan rata-rata sebesar 102,146 mm/hari. Selengkapnya rata-rata return level disajikan dalam boxplot Gambar 4.7 berikut.



Gambar 4.7 Boxplot *Return Level* Tahun 2012

Setelah mendapatkan nilai *return level* dengan periode ulang 2 tahun yang divalidasi dengan data yang ada yaitu periode tahun 2011-2012, maka dilakukan perhitungan *return level* dengan periode ulang lainnya. Nilai parameter yang sudah ditemukan disubstitusikan ke rumusan *return level* di masing-masing stasiun pengamatan curah hujan di Kabupaten Lamongan dengan periode ulang jumlah tahun yang ditentukan. Tabel 4.9 berikut disajikan *return level* curah hujan pada periode ulang yang lain.

Tabel 4.9 adalah perhitungan prediksi *return level* curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan periode ulang 5th, 8th, 10th, 15th, 20th, 25th dan 50th dengan menggunakan keempat model *max-stable*. *Return level* dengan model *geometric gaussian* menunjukkan di stasiun pengamatan Babat terjadi curah hujan paling tinggi diantara keenam stasiun pengamatan yang lain. Prediksi *return level* curah hujan ekstrem yang terjadi pada tahun 2015, 2018, 2020, 2025, 2030, 2035 dan 2060, menggunakan model *Smith*, *Schlather*, *Brown-Resnick* dan *geometric*

gaussian di tujuh stasiun pengamatan curah hujan Kabupaten Lamongan selengkapnya disajikan dalam Tabel 4.9 berikut.

Tabel 4.9 Perhitungan *Retun Level* periode 5, 8, 10, 15,20, 25 dan 50 th (mm/hari)

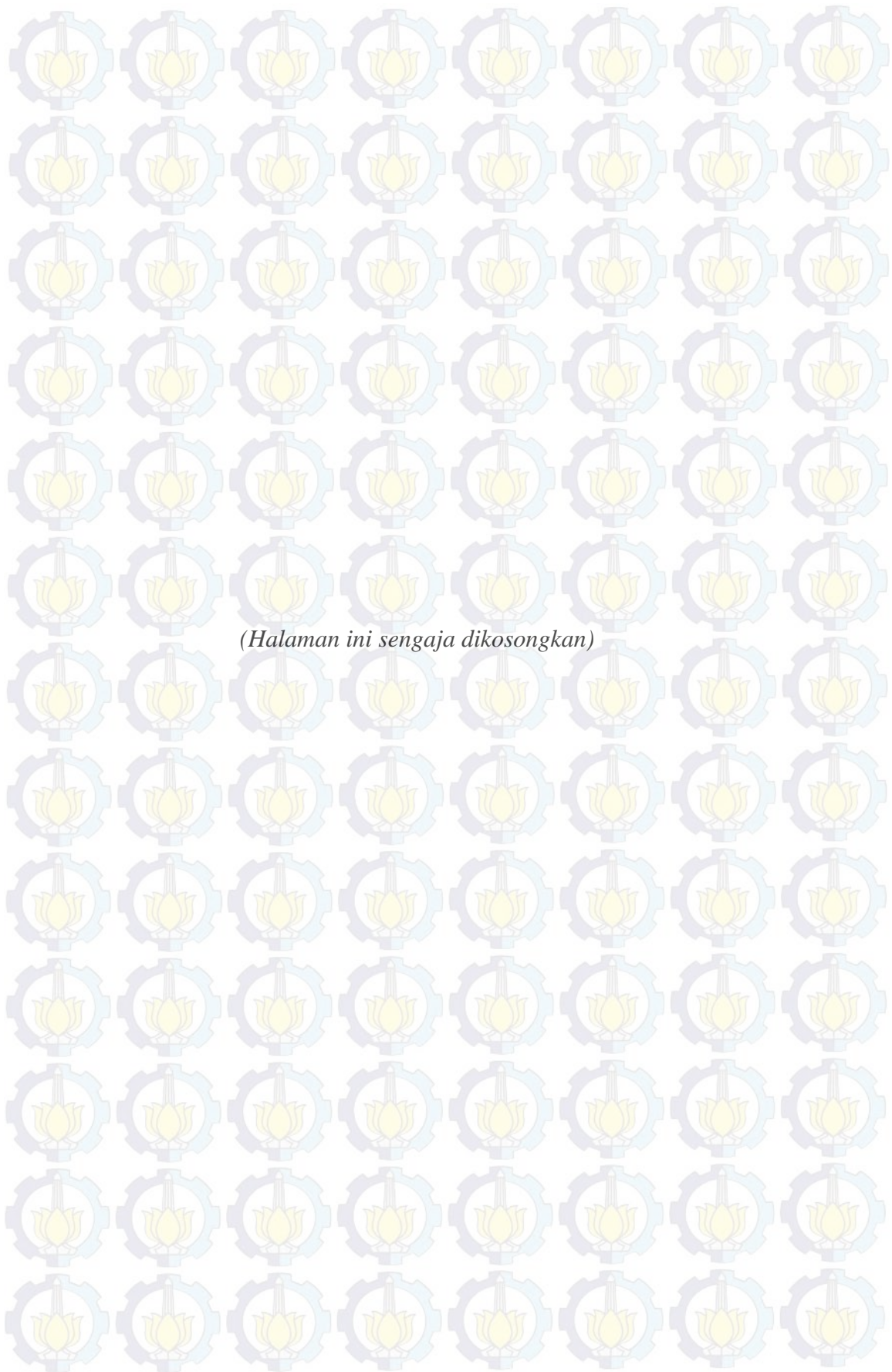
Lokasi	5th (2015)	8th (2018)	10th (2020)	15th (2025)	20th (2030)	25th (2035)	50th (2060)
----- <i>Smith</i> -----							
Babat	127,759	137,381	141,723	149,277	154,389	158,222	169,440
Blawi	119,631	129,435	133,858	141,554	146,762	150,667	162,096
Karang binangun	118,289	128,183	132,647	140,414	145,670	149,611	164,809
Kedungpring	124,301	132,393	136,346	145,213	150,182	153,907	161,118
Lamongan	118,681	128,274	132,602	140,132	145,228	149,049	160,232
Pangkatrejo	126,346	136,270	140,748	148,538	153,811	157,763	169,333
Sukodadi	122,889	132,542	136,897	144,474	149,603	153,448	164,701
----- <i>Schlather</i> -----							
Babat	126,969	136,046	140,112	147,140	151,863	155,385	165,598
Blawi	118,812	128,058	132,200	139,359	144,170	147,758	158,16
Karang binangun	117,453	126,783	130,963	138,188	143,043	146,664	157,163
Kedungpring	123,570	132,393	136,346	143,177	147,768	151,191	161,118
Lamongan	117,901	126,954	131,008	138,014	142,722	146,233	156,415
Pangkatrejo	125,497	134,855	139,048	146,295	151,164	154,796	165,327
Sukodadi	122,098	131,203	135,281	142,331	147,069	150,602	160,847
----- <i>Brown-Resnick</i> -----							
Babat	129,740	140,034	144,714	152,911	158,499	162,712	175,162
Blawi	121,822	132,331	137,109	145,477	151,182	155,484	168,193
Karang binangun	120,583	131,200	136,027	144,48	150,244	154,589	167,430
Kedungpring	125,977	135,948	140,482	148,421	153,834	157,915	169,974
Lamongan	120,633	130,891	135,555	143,723	149,292	153,490	165,897
Pangkatrejo	128,670	139,323	144,166	152,648	158,431	162,791	175,675
Sukodadi	124,907	135,236	139,933	148,158	153,766	157,994	170,487
----- <i>Geometric Gaussian</i> -----							
Babat	130,034	140,368	145,068	153,303	158,921	163,157	175,682
Blawi	120,965	131,389	136,132	144,438	150,105	154,379	167,014
Karang binangun	119,214	129,684	134,446	142,789	148,481	152,773	165,463
Kedungpring	127,632	137,830	142,469	150,595	156,139	160,320	172,680
Lamongan	120,876	131,194	135,888	144,111	149,720	153,9504	166,457
Pangkatrejo	127,329	137,813	142,583	150,938	156,638	160,936	173,644
Sukodadi	124,927	135,276	139,984	148,230	153,856	158,099	170,642

Tabel 4.9 menunjukkan pada tahun 2015, 2018, 2020, 2025, 2030, 2035 dan 2060 curah hujan ekstrem di stasiun pengamatan Babat dengan model

geometric gaussian berturut-turut adalah: 130.034 mm/hari, 140.368 mm/hari, 145.069 mm/hari, 153.304 mm/hari, 158.921 mm/hari, 163.157 mm/hari dan 175.682 mm/hari.

Return level terendah dihasilkan model *Geometric Gaussian* adalah di stasiun pengamatan Karangbinangun yaitu pada tahun 2015, 2018, 2020, 2025, 2030, 2035, 2060 curah hujan ekstrem di stasiun pengamatan Karangbinangun berturut-turut adalah: 119.214 mm/hari, 129.684 mm/hari, 134.447 mm/hari, 148.481 mm/hari, 152.773 mm/hari dan 165.463 mm/hari. Tidak menutup kemungkinan akan diperoleh model *max-stable* terbaik yang berbeda-beda di setiap periode ulang prediksi *return level*.

Nilai *return level* curah hujan pada Tabel 4.9 tersebut dapat memberikan informasi yang sangat penting, baik dalam bidang pertanian, serta klimatologi. Selain itu, dalam periode jangka panjang, informasi *return level* juga sangat bermanfaat untuk mengukur kekuatan atau ketahanan suatu bangunan seperti bendungan, jembatan, atau gedung terhadap curah hujan ekstrem.



BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Estimasi parameter model *geometric gaussian* dengan MPLE diperoleh hasil yang tidak *close form* dan selanjutnya diselesaikan dengan metode iteratif Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Estimasi parameter lokasi (μ), skala (σ), dan parameter bentuk (α) untuk masing-masing lokasi dapat ditentukan dengan persamaan model *trend surface* terbaik adalah model no. 8 yaitu :

$$\tilde{\sim}(x) = S_{0,\sim} + S_{2,\sim} \text{lon}(x)$$

$$\tilde{\uparrow}(x) = S_{0,\uparrow} + S_{2,\uparrow} \text{lat}(x)$$

$$\tilde{<}(x) = S_{0,<}$$

diperoleh estimasi parameter dengan *trend surface* terbaik sebagai berikut:

$$\hat{\sim}(x) = 1,0112 + 0,0002 \text{lon}(x)$$

$$\hat{\uparrow}(x) = 1,0077 + 0,0034 \text{ lat}(x)$$

$$\hat{<}(x) = 0,976$$

2. Koefisien eksternal data curah hujan ekstrem menunjukkan adanya indikasi dependen antar lokasi pengamatan di Kabupaten Lamongan. Selain itu, model *Geometric Gaussian* terbaik yang terpilih berdasarkan TIC adalah model dengan fungsi korelasi *Cauchy*
3. *Return level* curah hujan ekstrem di tujuh stasiun pengamatan di Kabupaten Lamongan dengan periode ulang dua tahun memberikan nilai prediksi curah hujan antara 96.68 mm/hari sampai 107.83 mm/hari.

5.2 Saran

Model *Geometric Gaussian* dan model lain dari metode *max-stable processes* berpotensi untuk diterapkan pada jenis data iklim lainnya, khususnya curah hujan dan suhu ekstrem. Melalui plot koefisien eksternal disimpulkan ada indikasi unsur spasial pada curah hujan ekstrem di Kabupaten Lamongan. Dengan

demikian uji kebaikan model-model pada *max-stable processes* dapat diterapkan pada curah hujan di lokasi lain.

Selain itu, untuk mendapatkan prediksi curah hujan ekstrem (*return level*) yang akurat, maka perlu dilakukan eksplorasi terkait variabel penjelas yang digunakan serta menentukan model spasial GEV yang sesuai dengan data. Pada penelitian selanjutnya sebaiknya dilakukan analisis data curah hujan baik di Kabupaten Lamongan maupun lokasi lainnya dengan menggunakan model-model lain *max-stable* proses yang sudah mulai dikembangkan.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A : DATA CURAH HUJAN (MM) TAHUN 1981-2012

Thn	Bln	Tgl	Babat	Blawi	Karang- binangun	Kedung- pring	Lmg	Pangkat- rejo	Suko- dadi
1981	1	1	4	13	12	5	5	30	16
1981	1	2	0	35	20	29	0	21	20
1981	1	3	84	35	37	41	0	18	45
1981	1	4	50	14	26	46	0	98	33
1981	1	5	0	4	0	0	0	0	16
1981	1	6	0	5	0	0	4	0	4
1981	1	7	16	0	0	19	41	4	1
1981	1	8	16	12	38	0	0	15	10
1981	1	9	0	0	3	0	4	9	2
1981	1	10	14	7	12	18	0	18	7
1981	1	11	0	0	4	5	4	12	0
1981	1	12	4	6	4	0	8	14	6
1981	1	13	0	0	19	2	45	10	0
1981	1	14	0	0	3	2	9	0	0
1981	1	15	27	0	7	8	17	3	5
1981	1	16	25	14	0	6	0	5	9
...
...
...
2005	6	18	28	0	0	0	0	0	0
2005	6	19	4	0	0	0	0	0	0
2005	6	20	0	0	0	1	0	9	0
2005	6	21	29	17	0	29	33	13	45
2005	6	22	3	0	4	12	0	2	0
2005	6	23	37	60	46	13	18	27	35
...
...
...
2012	12	25	0	18	30	0	0	0	0
2012	12	26	0	9	34	10	3	0	0
2012	12	27	2	0	0	9	2	0	5
2012	12	28	3	8	49	2	13	10	6
2012	12	29	5	16	58	4	25	14	3
2012	12	30	10	26	33	22	18	25	13
2012	12	31	36	17	27	20	13	6	20

**LAMPIRAN B : DATA CURAH HUJAN EKSTREM (MM) DENGAN
METODE BLOK MAKSIMA (1981-2010)**

B1. Stasiun Curah Hujan Babat

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	96	36	157	71	90	106	28
2	90	37	106	72	65	107	29
3	72	38	98	73	64	108	69
4	125	39	59	74	50	109	57
5	14,62	40	119	75	67	110	13
6	7,45	41	89	76	82	111	88
7	17,21	42	0	77	119	112	115
8	72	43	58	78	60	113	62
9	120	44	118	79	54	114	86
10	35	45	105	80	46	115	50
11	110	46	31	81	76	116	65
12	115	47	115	82	68	117	95
13	105	48	72	83	73	118	75
14	115	49	84	84	66	119	65
15	89	50	13	85	39		
16	136	51	39	86	0		
17	107	52	65	87	17,21		
18	105	53	56	88	102		
19	66	54	0	89	57		
20	69	55	105	90	5		
21	69	56	102	91	74		
22	36	57	76	92	87		
23	73	58	110	93	64		
24	132	59	67	94	105		
25	35	60	62	95	33		
26	9	61	42	96	50		
27	47	62	37	97	75		
28	107	63	105	98	37		
29	89	64	62	99	62		
30	105	65	34	100	75		
31	90	66	26	101	89		
32	134	67	58	102	5		
33	109	68	111	103	46		
34	105	69	136	104	88		
35	101	70	45	105	97		

B2. Stasiun Curah Hujan Blawi

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	47	36	85	71	91	106	60
2	58	37	52	72	130	107	56
3	78	38	24	73	100	108	200
4	72	39	5	74	20	109	55
5	45	40	49	75	92	110	6
6	4	41	66	76	70	111	47
7	8	42	0	77	100	112	81
8	68	43	53	78	52	113	73
9	60	44	44	79	60	114	36
10	0	45	12,31	80	81	115	50
11	63	46	6,24	81	93	116	96
12	135	47	10,96	82	50	117	63
13	98	48	113	83	113	118	50
14	40	49	83	84	136	119	64
15	58	50	56	85	65		
16	67	51	81	86	11		
17	68	52	72	87	10,96		
18	27	53	103	88	94		
19	42	54	8	89	39		
20	60	55	32	90	16		
21	67	56	106	91	50		
22	41	57	101	92	67		
23	68	58	84	93	45		
24	71	59	90	94	26		
25	120	60	107	95	53		
26	20	61	41	96	50		
27	34	62	140	97	70		
28	61	63	52	98	60		
29	31	64	76	99	50		
30	47	65	72	100	65		
31	57	66	6,14	101	49		
32	60	67	30	102	10		
33	139	68	113	103	49		
34	78	69	130	104	100		
35	110	70	38	105	58		

B3. Stasiun Curah Hujan Karangbinangun

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	72	36	136	71	68	106	41
2	34	37	65	72	68	107	32
3	78	38	28	73	76	108	164
4	82	39	8	74	18	109	80
5	45	40	62	75	62	110	2
6	22	41	96	76	70	111	78
7	10	42	12	77	67	112	63
8	63	43	38	78	13	113	85
9	73	44	80	79	61	114	11
10	0	45	41	80	43	115	60
11	47	46	38	81	44	116	105
12	63	47	106	82	68	117	95
13	90	48	49	83	68	118	67
14	56	49	52	84	110	119	83
15	57	50	54	85	69		
16	58	51	32	86	0		
17	88	52	65	87	72		
18	35	53	102	88	56		
19	101	54	12	89	47		
20	48	55	38	90	12		
21	54	56	100	91	47		
22	57	57	92	92	67		
23	33	58	52	93	63		
24	100	59	43	94	56		
25	97	60	135	95	30		
26	33	61	64	96	58		
27	34	62	15	97	73		
28	65	63	62	98	46		
29	50	64	60	99	39		
30	62	65	64	100	62		
31	35	66	4	101	80		
32	52	67	19	102	4		
33	126	68	76	103	31		
34	97	69	95	104	85		
35	95	70	43	105	54		

B4. Stasiun Curah Hujan Kedungpring

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	81	36	119	71	114	106	35
2	43	37	93	72	62	107	0
3	48	38	38	73	81	108	58
4	86	39	39	74	54	109	83
5	56	40	84	75	68	110	23
6	4	41	79	76	66	111	134
7	0	42	4	77	51	112	56
8	116	43	67	78	36	113	51
9	83	44	91	79	56	114	41
10	16	45	67	80	63	115	24
11	96	46	30	81	64	116	61
12	64	47	68	82	32	117	83
13	79	48	70	83	89	118	37
14	57	49	90	84	74	119	79
15	75	50	27	85	37		
16	75	51	90	86	0		
17	130	52	78	87	84		
18	46	53	118	88	114		
19	62	54	4	89	91		
20	61	55	21	90	9		
21	63	56	85	91	43		
22	39	57	69	92	58		
23	63	58	58	93	66		
24	95	59	110	94	37		
25	76	60	80	95	0		
26	7	61	69	96	104		
27	46	62	52	97	132		
28	78	63	53	98	37		
29	74	64	68	99	77		
30	81	65	43	100	76		
31	60	66	3	101	114		
32	103	67	36	102	7		
33	92	68	150	103	64		
34	71	69	69	104	53		
35	52	70	41	105	72		

B5. Stasiun Curah Hujan Lamongan

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	52	36	62	71	51	106	26
2	3	37	39	72	70	107	19
3	0	38	52	73	65	108	77
4	29	39	23	74	31	109	38
5	14,48	40	55	75	75	110	13
6	5,48	41	42	76	55	111	44
7	7,96	42	36	77	96	112	45
8	85	43	61	78	39	113	83
9	72	44	63	79	58	114	44
10	60	45	45	80	75	115	8
11	48	46	0	81	110	116	53
12	68	47	48	82	90	117	59
13	40	48	56	83	79	118	55
14	45	49	51	84	129	119	42
15	57	50	4	85	45		
16	46	51	65	86	0		
17	35	52	53	87	46		
18	73	53	91	88	63		
19	98	54	1	89	58		
20	132	55	36	90	51		
21	68	56	58	91	18		
22	52	57	56	92	82		
23	47	58	30	93	123		
24	109	59	65	94	31		
25	51	60	101	95	49		
26	21	61	62	96	72		
27	22	62	45	97	48		
28	63	63	15	98	33		
29	42	64	99	99	38		
30	60	65	98	100	66		
31	40	66	12	101	53		
32	68	67	61	102	39		
33	71	68	66	103	28		
34	61	69	95	104	58		
35	58	70	40	105	72		

B6. Stasiun Curah Hujan Pangkatrejo

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	45	36	75	71	50	106	62
2	38	37	65	72	42	107	37
3	47	38	50	73	70	108	62
4	70	39	12	74	26	109	92
5	85	40	65	75	35	110	10
6	35	41	65	76	80	111	39
7	30	42	5	77	95	112	80
8	58	43	75	78	40	113	98
9	45	44	80	79	48	114	36
10	20	45	65	80	102	115	19
11	75	46	21	81	48	116	78
12	83	47	58	82	40	117	64
13	45	48	81	83	43	118	102
14	49	49	60	84	95	119	75
15	58	50	15	85	136		
16	62	51	69	86	0		
17	47	52	65	87	83		
18	33	53	44	88	71		
19	65	54	0	89	52		
20	88	55	27	90	4		
21	62	56	80	91	92		
22	75	57	56	92	41		
23	62	58	100	93	73		
24	75	59	63	94	90		
25	69	60	76	95	38		
26	40	61	62	96	78		
27	75	62	105	97	44		
28	62	63	80	98	27		
29	34	64	82	99	60		
30	85	65	39	100	70		
31	52	66	10	101	63		
32	64	67	0	102	4		
33	86	68	95	103	80		
34	59	69	60	104	64		
35	80	70	40	105	93		

B7. Stasiun Curah Hujan Sukodadi

Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH	Obs	CH
1	43	36	58	71	59	106	19
2	47	37	57	72	63	107	71
3	90	38	34	73	83	108	63
4	83	39	15	74	12	109	48
5	43	40	83	75	64	110	8
6	0	41	74	76	45	111	44
7	0	42	0	77	76	112	71
8	85	43	45	78	18	113	48
9	82	44	56	79	84	114	39
10	0	45	140	80	94	115	34
11	85	46	6	81	95	116	63
12	101	47	72	82	99	117	74
13	67	48	60	83	79	118	28
14	48	49	64	84	89	119	87
15	56	50	35	85	43		
16	54	51	43	86	0		
17	105	52	34	87	0		
18	3	53	54	88	80		
19	87	54	18	89	34		
20	68	55	42	90	5		
21	90	56	77	91	48		
22	46	57	76	92	79		
23	92	58	48	93	70		
24	60	59	79	94	68		
25	67	60	76	95	65		
26	31	61	44	96	37		
27	0	62	87	97	61		
28	67	63	59	98	45		
29	53	64	54	99	67		
30	16	65	42	100	87		
31	42	66	3	101	58		
32	70	67	35	102	17		
33	45	68	89	103	98		
34	80	69	110	104	60		
35	90	70	68	105	79		

**LAMPIRAN C: MODEL KOMBINASI TREND SURFACE DISTRIBUSI
GENERALIZED EXTREME VALUE (GEV) SPASIAL**

No.	$\sim (x)$	$\dagger (x)$
1.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
2.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
3.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
4.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$
5.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$
6.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x) + S_{2,\dagger}lat(x)$
7.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x) + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
8.	$S_{0,-} + S_{1,-}lon(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{2,\dagger}lat(x)$
9.	$S_{0,-} + S_{2,-}lat(x)$	$S_{0,\dagger} + S_{1,\dagger}lon(x)$

LAMPIRAN D: SYNTAX PROGRAM R :”extRemes dan spatialExtremes”

```
#Packages ExtRemes (ada pada Program R 2.14)
#Tujuannya untuk mengubah data ke distribusi GEV)
#copy data tiap stasiun dari excell pindah ke notepad
#Load Packages pilih extRemes
#Muncul Tampilan Extremes Toolkit
#klik File:read data,panggil data yang di notepad (baris pang atas
di data beri nama stasiun),
# File type=common,Pilih Header,save as (beri nama),OK
#klik analyze,pilih GEV,pilih data object:data yang disave,
# optimization:pilih metode yang dipakai(misal BFGS),Response:data
yang di panggil dari notepad
#Pastikan semua pilihan tersebut dalam posisi di blok
#OK
#Diperoleh output parameter MU,SIGMA,Xi yang selanjutnya akan
dipakai untuk transformasi ke distribusi Frechet
# dan proses selanjutnya menggunakan packages Spatialextremes
```

```
#Packages SpatialExtremes
#Input data koordinat (c)
location<-as.matrix(read.table("E:/koordinat.txt", header=T))
colnames(location)<-c("lat", "lon")
c=location

#Panggil data hasil blok maxima (X)
x1<-as.matrix(read.table("E:/babat.txt",header=T))
x2<-as.matrix(read.table("E:/blawi.txt",header=T))
x3<-as.matrix(read.table("E:/karangbinangun.txt",header=T))
x4<-as.matrix(read.table("E:/kedungpring.txt",header=T))
x5<-as.matrix(read.table("E:/lamongan.txt",header=T))
x6<-as.matrix(read.table("E:/pangkatrejo.txt",header=T))
x7<-as.matrix(read.table("E:/sukodadi.txt",header=T))
X=matrix(c(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7),ncol=7)
colnames(X)=c("Babat","Blawi","Karangbinangun","Kedungpring","Lamo
ngan","Pangkatrejo","Sukodadi")
```

```
#Uji Kolmogorov Smirnov (apakah data X berdistribusi GEV)
ks.test(x1,ecdf(x1))
ks.test(x2,ecdf(x2))
ks.test(x3,ecdf(x3))
ks.test(x4,ecdf(x4))
ks.test(x5,ecdf(x5))
ks.test(x6,ecdf(x6))
ks.test(x7,ecdf(x7))
#(ecdf=empirical cumulative distribution function)

#Input Data GEV (Y)
```



```

#Masukkan nilai-nilai parameter distribusi GEV hasil packages
ExtRemes
  (contoh:x1,60.26467,35.45859,-0.32202)
#Transformasi ke distribusi Frechet (Y)=data GEV
y1<-gev2frech(x1,60.26467,35.45859,-0.32202)
y2<-gev2frech(x2,47.24024,31.53616,-0.10857)
y3<-gev2frech(x3,46.53285,28.53127,-0.16214)
y4<-gev2frech(x4,51.36284,31.45565,-0.25359)
y5<-gev2frech(x5,42.08619,25.84474,-0.18259)
y6<-gev2frech(x6,48.70501,26.75300,-0.26796)
y7<-gev2frech(x7,45.78645,29.37100,-0.27378)
Y=matrix(c(y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7),ncol=7)
colnames(Y)=c("Babat","Blawi","Karangbinangun","Kedungpring","Lamo
ngan","Pangkatrejo","Sukodadi")

#extremal coefficient
fitextcoeff(Y,c,estim ="Smith")

#Running model fit spatial GEV (fitspatgev) secara umum
loc.form<-y~lon+lat
scale.form<-y~lon+lat
shape.form<-y~1
M1<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form, scale.form, shape.form)

data<-as.matrix(read.table("E:/max3.txt", header=T))
loc.form<-y~lat
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M2<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form, scale.form, shape.form)

loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lon+lat
shape.form<-y~1
M3<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

loc.form<-y~lon+lat
scale.form<-y~lon
shape.form<-y~1
M4<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lon
shape.form<-y~1
M5<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

loc.form<-y~lat
scale.form<-y~lon+lat

```



```

shape.form<-y~1
M6<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

```

```

loc.form<-y~lon+lat
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M7<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

```

```

loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M8<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

```

```

loc.form<-y~lat
scale.form<-y~lon
shape.form<-y~1
M9<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)
TIC(M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,M8,M9)

```

```

#MODEL MAX STABLE (fitmaxstab)
#Model fitspatgev terpilih + cov.mod tiap model
#KHUSUS MODEL SCHLATER DAN GEOMETRIK GAUSSIAN,TENTUKAN DAHULU
KOEFSIEN KORELASI (r) TERBAIK
#SCHLATER
rS1<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="whitmat",fit.marge=FALSE)
rS2<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="powexp",fit.marge=FALSE)
rS3<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="cauchy",fit.marge=FALSE)
rS4<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="bessel",fit.marge=FALSE)
TIC(rS1, rS2, rS3, rS4)

```

```

#GEOMETRIC GAUSSIAN
rG1<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="gwhitmat",fit.marge=FALSE)
rG2<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="gpowexp",fit.marge=FALSE)
rG3<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="gcauchy",fit.marge=FALSE)
rG4<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="gbessel",fit.marge=FALSE)
TIC(rG1, rG2, rG3, rG4)

```

```

#cov.mod "gauss" model Smith
rSM1<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="gauss",fit.marge=FALSE)

```

```

#cov.mod "brown" model Brown Resnick
rB1<-fitmaxstab(Y,c,cov.mod="brown",fit.marge=FALSE)

```

```

#estimasi parameter tiap model dengan model terpilih
loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M8<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)

```



```

smith<-
fitmaxstab(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form,cov.mod="gaus
s",iso=TRUE,method="BFGS")
S1<-fitmaxstab(X,c, cov.mod="gauss", loc.form, scale.form ,
shape.form)

loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M8<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)
schlat<-
fitmaxstab(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form,cov.mod="cauc
hy",iso=TRUE,method="BFGS")
SC1<-fitmaxstab(X,c, cov.mod="cauchy", loc.form, scale.form ,
shape.form)


loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M8<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)
brown<-
fitmaxstab(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form,cov.mod="brow
n",iso=TRUE,method="BFGS")
B1<-fitmaxstab(X,c, cov.mod="brown", loc.form, scale.form ,
shape.form)

loc.form<-y~lon
scale.form<-y~lat
shape.form<-y~1
M8<-fitspatgev(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form)
g<-
fitmaxstab(Y,scale(c),loc.form,scale.form,shape.form,cov.mod="gcau
chy",iso=TRUE,method="BFGS")
G1<-fitmaxstab(X,c, cov.mod="gcauchy", loc.form, scale.form ,
shape.form)

#return level untuk T=8 dimana T=blok (Karena di tesis ini 1 tahun
= 4 blok maka T=8 adalah prediksi untuk 2th.
s8=predict(S1,c,ret.per=8)
sc8=predict(SC1,c,ret.per=8)
br8=predict(B1,c,ret.per=8)
g8=predict(G1,c,ret.per=8)

#return level untuk 5th,8th,10th,15th,20th,25th,50th
#1.SMITH
s20=predict(S1,c,ret.per=20)

```

```
s32=predict(S1,c,ret.per=32)
s40=predict(S1,c,ret.per=40)
s60=predict(S1,c,ret.per=60)
s80=predict(S1,c,ret.per=80)
s100=predict(S1,c,ret.per=100)
s200=predict(S1,c,ret.per=200)
```

#2.SCHLATER

```
sc20=predict(SC1,c,ret.per=20)
sc32=predict(SC1,c,ret.per=32)
sc40=predict(SC1,c,ret.per=40)
sc60=predict(SC1,c,ret.per=60)
sc80=predict(SC1,c,ret.per=80)
sc100=predict(SC1,c,ret.per=100)
sc200=predict(SC1,c,ret.per=200)
```

#3.BROW RESNICK

```
br20=predict(B1,c,ret.per=20)
br32=predict(B1,c,ret.per=32)
br40=predict(B1,c,ret.per=40)
br60=predict(B1,c,ret.per=60)
br80=predict(B1,c,ret.per=80)
br100=predict(B1,c,ret.per=100)
br200=predict(B1,c,ret.per=200)
```

#4.GEOMETRIC GAUSSIAN

```
g20=predict(G1,c,ret.per=20)
g32=predict(G1,c,ret.per=32)
g40=predict(G1,c,ret.per=40)
g60=predict(G1,c,ret.per=60)
g80=predict(G1,c,ret.per=80)
g100=predict(G1,c,ret.per=100)
g1200=predict(B1,c,ret.per=200)
```


DAFTAR PUSTAKA

Anindita, R. Y. (2015). *Pemodelan spatial extreme value dengan Max Stable Process berdasarkan model Smith* studi kasus : curah hujan ekstrem di kabupaten Lamongan. Program Magister Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG). Website: http://dataweb.bmkg.go.id/cews/pikam/pdf/PMK2015_BMKG_2.pdf.

Blanchet, J., dan Davison, A. C. (2011). Spatial modeling of extreme snow depth. *The annals of Applied Statistics Journal*, 5(3), 1699-1725.

Buishand, T. A., de Haan, L., dan Zhou, C. (2008). On spatial extremes: With application to a rainfall problem. *Ann. Appl. Stat.* 2, 624-642.

Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modelling of extreme values*. Springer. London.

Cooley, D., Naveau, P., dan Poncet, P. (2006). *Variograms for spatial Max-Stable random fields*. Lecture Notes in Statistics. 187: 373-390, Springer, New York.

Davison, A.C., Huser, R., dan Thibaud, E. (2013). *Geostatistics of dependent and asymptotically independent extremes*. Mathematical Geosciences Manuscript.

Davison, A.C., Padoan, S. A., dan Ribatet, M. (2012). Statistical modeling of spatial extremes. *Statistical Science*, 27(2), 161-186. Institute of Mathematical Statistics.

Davison, A.C., Padoan, S., dan Ribatet, M. (2010). Statistical modelling of spatial extremes. Unpublished manuscript.

De Haan, L. (1984). A spectral representation for max-stable processes. *The Annals of Probability*. 12(4) : 1194-1204

Fisher, R.A., Tippet, L.H.C., dan Gnekendo. (1928). Limiting forms of the frequency distribution in the largest particle size and smallest member of a sample. *Proc. Camb*, Vol. 24, hal. 180-190.

Gilli, M., dan Kellezi, E. (2003). *An application of extreme value theory for measuring risk*. Elsevier Science

- Gilleland, E., dan Katz, R.W. (2006). *Analyzing seasonal to interannual extreme weather and climate variability with the extremes toolkit (extremes)*. Based on the recommendation of the 18th conference on climate variability and change, 86th American Meteorological Society (AMS) Annual Meeting. 29 January–2 February 2006. Atlanta Georgia.
- Kabluchko, Z., Schlather, M., dan De Haan, L. (2009). Stationary Max Stable fields associated to negative definite functions. *The Annals of Probability*, 37 (5), 2042-2065
- Kadarsah. (2001). Meteorologi dan sains atmosfer tiga pola hujan di Indonesia. website: <https://kadarsah.wordpress.com/2007/06/29/tiga-daerah-iklim-Indonesia>
- Kotz, S., dan Nadarajah, S. (2000). *Extreme value distributions: theory and applications*. London: Imperial College Press.
- Li, Y., Cai W., dan Campbell, E. P. (2005). Statistical modelling of extreme rainfall in southwest Australia. *Journal of Climate*, 18 , 852-863.
- Malika, R. (2015). *Spatial extreme modelling ekstrem dengan pendekatan proses Max Stable model Schlatter*. Program Magister Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
- Mallor, F., Nualart, E., dan Omey, E. (2009). *An introduction to statistical modelling of extreme value application to calculate extreme wind speeds*. Pamplona, Hogeschool Universitei Brussel.
- McNeil, A. J. (1999). *Extreme value theory for risk managers*. Zurich: Department Mathematic ETH Zentrum.
- Padoan, S. A., Ribatet, M., dan Sisson, S. A. (2010). Likelihood-based inference for Max-Stable processes. *Journal of the American Statistical Association*, Vol 105, No. 489, 263-277, Theory and Methods
- Ramadani, I. R. (2015). *Spatial extreme value modelling dengan Max Stable Processes model Brown-Resnick (Aplikasi: curah hujan ekstrem di kabupaten Lamongan Tahun 1981-2012)*. Program Magister Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
- Ribatet, M. (2009). *A user's guide to the spatial extremes package*. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne: Switzerland.

Ribatet, M. *Max-stable processes: Theory and Inference*. Institute of Mathematics, EPFL. Laboratory of Environmental Fluid Mechanics, EPFL

Ribatet, M. (2013). Spatial extremes: Max-stable processes at work. *Journal de la Societe Francaise de Statistique*, 154 (2), 156-177.

Sang, H., dan Gelfand, A. E. (2009). Continuous spatial process models for spatial extreme values. *J. Agric. Biol. Environ. Stat.* 15, 49-65.

Sari, F. M. (2013). *Prediksi curah hujan ekstrim secara spasial (studi kasus: curah hujan bulanan di kabupaten Indramayu)*. Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor.

Schlather, M., dan Tawn, J. A. (2003). A dependence measure for multivariate and spatial extremes values: Properties and Inference. *Biometrika*, 90, 139-156

Schlather, M. (2002). Models for stationary Max Stable random fields. *Extremes*, 5, 33-44.

Smith, E. L., dan Stephenson, A. G. (2009). An extended Gaussian max-stable process model for spatial extremes. *J.Statist. Plann. Inference*, 139, 1266-1275.

Smith, R.L. (1990). Max Stable processes and spatial extremes. University of North Carolina. (Tidak dipublikasikan)

Takeuchi, K. (1976). Distribution of informational statistics and a criterion of fitting. *Suri-Kagaku*, 153, 12-18.

Tawn, J. A. (1988). Bivariate extreme value theory: Models and estimation. *Biometrika*, 75 397-415.

Tukidi. (2010). Karakter curah hujan di Indonesia.Semarang: *Jurnal Geografi*,7(2),136-145.

Varin, C., Reid, N., dan Firth, D. (2011). An overview of composite likelihood methods. *Statistica Sinica*. 21:5-42.

Wahyudi.(2012). *Identifikasi curah hujan ekstrem di kabupaten Ngawi menggunakan Generalized Extreme Value dan Generalized Pareto Distribution*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

WMO. (2009). Guidelines on analysis of extremes in a changing climate in support of informed decisions for adaptation. Publications Board. Geneva 2, Switzerland



Halaman ini sengaja dikosongkan

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di kota Lamongan dengan nama lengkap Yeni Dwi Hatanti dan lahir pada tanggal 12 Mei 1979, merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Penulis menempuh pendidikannya mulai dari SDN. Ardirejo II Sambeng Lamongan (lulus tahun 1991), SMPN. Sambeng Lamongan (lulus tahun 1994), SMAN. Ngimbang Lamongan (lulus tahun 1997), dan melanjutkan pendidikan Perguruan Tinggi Negeri di Universitas Diponegoro Semarang Jurusan Matematika (lulus tahun 2002). Kemudian tahun 2014 penulis mendapat kesempatan baik untuk menempuh Program Magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember jurusan Stasistika. Penulis menempuh Studi S2 selama tiga semester dan lulus pada tahun 2016 dengan tesis yang berjudul **“Perbandingan Model *Smith, Schlather, Brown-Resnick*, dan *Geometric Gaussian* Pada Pemodelan Curah Hujan Ekstrem (Studi Kasus: Curah Hujan Ekstrem di Kabupaten Lamongan)”**. Bagi pembaca yang ingin menyampaikan saran dan kritik, atau berdiskusi terkait tesis ini dapat menghubungi di email penulis [“hatanti03@gmail.com”](mailto:hatanti03@gmail.com)